OMPP 5
Potentiel vecteur

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

1 Existence d'un potentiel vecteur **2**
- 1.1 Définition d'un potentiel vecteur 2
- 1.2 Non unicité d'un potentiel vecteur : notion de jauge 2
- 1.3 Expression du flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé 3

2 Opérateur laplacien vectoriel **3**
- 2.1 Définition 3
- 2.2 Linéarité 3
- 2.3 Expression dans les différents systèmes de coordonnées 4

3 Équation de Poisson et conséquences **4**
- 3.1 Équation de POISSON concernant un potentiel vecteur 4
- 3.2 Théorème de superposition 4
- 3.3 Potentiel vecteur créé par une distribution FINIE continue d'éléments de courant . . . 5
- 3.4 Complément (hors-examen) 6

4 Tableau récapitulatif des relations d'électrostatique et de magnétostatique **7**

1 Existence d'un potentiel vecteur

1.1 Définition d'un potentiel vecteur

L'équation de Maxwell-flux $div\overrightarrow{B}(M) = 0$ assure qu'il existe un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M)}$$

nommé *potentiel vecteur* (dont dérive le champ magnétique).

1.2 Non unicité d'un potentiel vecteur : notion de jauge

1.2.1 Non unicité d'un potentiel vecteur

Un potentiel vecteur n'est pas unique.

✎ Montrer que si $\vec{A}(M)$ est un potentiel pour le champ $\vec{B}(M)$ alors $\vec{A}'(M) = \vec{A}(M) + \overrightarrow{grad}f(M)$, où $f(M)$ est une fonction scalaire différentiable quelconque, est aussi un potentiel vecteur valable pour $\vec{B}(M)$.

$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}' = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,f)$ par linéarité du rotationnel

On $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,f) = 0$ $\forall f$ donc $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}' = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$

De la même façon que le potentiel scalaire V est défini à une constante près, le potentiel vecteur $\vec{A}$ est défini à un gradient près.

1.2.2 Notion de jauge

La non-unicité d'un potentiel vecteur permet d'imposer une condition supplémentaire dite *condition de jauge* qui permet de simplifier les calculs. En magnétostatique, il est possible de choisir :

La jauge de Coulomb : $\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}(M) = 0}$

Remarques :

- Il existe d'autres conditions de jauge possible.
- Utiliser une condition de jauge n'implique pas l'unicité du potentiel vecteur $\vec{A}$.

✎ Montrer que la jauge de Coulomb n'implique pas l'unicité du potentiel vecteur

Soit un potentiel $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,f$ où $\vec{A} = \overrightarrow{rot}\,\vec{B}$

Alors $div\,\vec{A}' = div\,\vec{A} + div(\overrightarrow{grad}\,f)$ par linéarité de la divergence

Ainsi $div\,\vec{A}' = \Delta f$ et $\boxed{div\,\vec{A}' = 0 \text{ ssi } \Delta f = 0}$

Si on peut trouver une fonction f telle que $\Delta f = 0$ alors le potentiel $\vec{A}'$ est un potentiel vecteur associé à $\vec{B}$ qui vérifie aussi la jauge de Coulomb

1.3 Expression du flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé

Le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ à travers une surface $(\mathcal{S})$ s'appuyant sur un contour fermé et orienté $(\mathcal{C})$ est égal à la circulation d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(M)$ le long de ce contour [a] :

$$\boxed{\iint_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{B}(M)\cdot d\overrightarrow{S}(M) = \oint_{M\in(\mathcal{C})} \overrightarrow{A}(M)\cdot d\overrightarrow{\ell}}$$

a. Rappelons que le sens de $d\overrightarrow{S}(M)$ est lié à celui de l'orientation du contour par la règle de la main droite

✎ Preuve :

$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ donc $\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{dS}$

D'après le théorème de Stokes on a : $\iint_{S_\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{dl}$

2 Opérateur laplacien vectoriel

2.1 Définition

L'opérateur laplacien vectoriel transforme le *champ vectoriel* $\vec{A}(M,t)$ en le *champ vectoriel* $\overrightarrow{\Delta}\vec{A}(M,t)$ défini tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}(M,t)\right) \triangleq \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\overrightarrow{A}(M,t)\right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A}(M,t)}$$

2.2 Linéarité

Soient $\overrightarrow{A}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ deux champs vectoriel ; λ et μ deux scalaires. L'opérateur laplacien vectoriel est un opérateur *linéaire* :

$$\overrightarrow{\Delta}\left(\lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}\right)(M,t) = \lambda\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A}(M,t) + \mu\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B}(M,t)$$

Cette propriété est évidente car le laplacien vectoriel est défini comme la somme de la composition d'opérateurs linéaires.

2.3 Expression dans les différents systèmes de coordonnées

2.3.1 Coordonnées cartésiennes

Soit $\left\{\overrightarrow{A}(M,t); M \in \mathcal{D}; t \in I\right\}$ un champ vectoriel ; on note :

$$\overrightarrow{A}(M,t) = A_x(M,t)\overrightarrow{e_x} + A_y(M,t)\overrightarrow{e_y} + A_z(M,t)\overrightarrow{e_z}$$

On peut démontrer :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A}(M,t) = \Delta A_x(M,t)\overrightarrow{e_x} + \Delta A_y(M,t)\overrightarrow{e_y} + \Delta A_z(M,t)\overrightarrow{e_z}}$$

Où Δ est le laplacien scalaire.

2.3.2 Autres systèmes de coordonnées

A priori, on demande un formulaire ! ...mais les expressions obtenues sont très compliquées.

3 Équation de Poisson et conséquences

3.1 Équation de Poisson concernant un potentiel vecteur

Sous la condition $div\vec{A}(M) = 0$ dite «jauge de Coulomb», un potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ est solution de l'équation de Poisson :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A}(M) = -\mu_0\overrightarrow{j}(M)}$$

✎ Preuve :

L'équation de Maxwell-Ampère statique s'écrit $\overrightarrow{rot}\, B = \mu_0 \vec{j}$

On $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ donc $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \mu_0\vec{j}$

$\overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{A}) - \overrightarrow{\Delta}\vec{A} = \mu_0\vec{j}$

On $div\,\vec{A} = 0$ d'après la jauge de Coulomb donc $\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$

3.2 Théorème de superposition

La relation qui lie un potentiel vecteur à sa source dite «équation de Poisson» est linéaire. Ainsi le théorème de superposition persiste pour ce potentiel :

Si $\left\{\overrightarrow{j}_1(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$ crée $\left\{\overrightarrow{A}_1(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$ et si $\left\{\overrightarrow{j}_2(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$ crée $\left\{\overrightarrow{A}_2(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$
alors $\left\{\lambda\overrightarrow{j}_1(M) + \mu\overrightarrow{j}_2(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$ crée $\left\{\lambda\overrightarrow{A}_1(M) + \mu\overrightarrow{A}_2(M); M \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Remarque : La connaissance de l'équation de Poisson n'est pas nécessaire pour affirmer le théorème de superposition. La relation qui lie les sources et le champ magnétique est linéaire (c'est un énoncé du théorème de superposition pour le champ magnétique) et la relation qui lie un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(M)$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ est aussi linéaire. Ainsi la relation qui lie les sources et un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}(M)$ est linéaire (c'est un énoncé du théorème de superposition pour un potentiel vecteur).

3.3 Potentiel vecteur créé par une distribution FINIE continue d'éléments de courant

3.3.1 Expression

■ La définition de l'élément de courant $d\vec{C}(P)$ au point P dépend de la nature de la distribution :

- si la distribution est linéique : $d\vec{C}(P) = I(P)d\vec{\ell}$ (le sens de $d\vec{\ell}$ est imposé par la flèche d'orientation de I) ;
- si la distribution est surfacique : $d\vec{C}(P) = \vec{j}_s(P)dS(P)$;
- si la distribution est volumique : $d\vec{C}(P) = \vec{j}(P)d\tau(P)$.

■ Le potentiel vecteur résultant en M est la somme des champs élémentaires créés par chaque élément de courant lorsque P parcourt la distribution. Ainsi on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_P \frac{d\overrightarrow{C}(P)}{PM}}$$

Le calcul direct de $\vec{A}(M)$ est une sommation vectorielle (comme celui de $\vec{B}(M)$) ; il ne présente donc pas de nets avantages pratiques.

✎ Montrer par analogie avec l'électrostatique que cette expression du potentiel vecteur convient.

$$\vec{\Delta}\vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \rightarrow \begin{cases} \Delta A_x = -\mu_0 j_x \\ \Delta A_y = -\mu_0 j_y \\ \Delta A_z = -\mu_0 j_z \end{cases}$$

En comparant les relations de poisson pour le potentiel vecteur et le potentiel scalaire $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\Delta A_x = -\mu_0 j_x$

On peut transposer $\begin{cases} V \rightarrow A_x \\ \rho \rightarrow j_x \\ \varepsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0 \end{cases}$

Les solutions de l'équation de poisson électrostatique sont $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in D} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$ donc les solutions de l'équation de poisson magnétostatique sont $A_x(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in D} \frac{j_x(P)}{PM} d\tau$

Ainsi $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in D} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau}$

3.3.2 Conséquences sur les symétries d'un potentiel vecteur

La relation liant $\left\{\overrightarrow{j}(P); P \in (\mathcal{D})\right\}$ et $\overrightarrow{A}(M)$ permettrait de se convaincre aisément que les relations qui suivent sont vraies. Elles persistent même si les relations intégrales ne sont pas utilisables.

■ **Soit π un plan de symétrie de la distribution de courants :**

$$\textbf{si } M' = \mathcal{S}_\pi(M) \textbf{ alors } \overrightarrow{A}(M',t) = \mathcal{S}_\pi\left(\overrightarrow{A}(M,t)\right).$$

■ **Soit π^* un plan de d'antisymétrie de la distribution de courants :**

$$\textbf{si } M' = \mathcal{S}_{\pi^*}(M) \textbf{ alors } \overrightarrow{A}(M',t) = -\mathcal{S}_{\pi^*}\left(\overrightarrow{A}(M,t)\right).$$

■ **Si une distribution de courants est invariante selon la coordonnée γ, les composantes d'un potentiel vecteur ne dépendent pas de γ :**

$$\overrightarrow{A}(M) = A_\alpha\left(\alpha,\beta,\cancel{\gamma}\right)\overrightarrow{e_\alpha} + A_\beta\left(\alpha,\beta,\cancel{\gamma}\right)\overrightarrow{e_\beta} + A_\gamma\left(\alpha,\beta,\cancel{\gamma}\right)\overrightarrow{e_\gamma}$$

3.4 Complément (hors-examen)

Grâce à la relation démontrée au 3.3.1, on peut démontrer la loi de Biot et Savart.

Comme :

$$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}(M)$$

Il vient :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(\mathcal{V})}\overrightarrow{rot}_M\left(\frac{\overrightarrow{j}(P)}{PM}\right)d\tau$$

On exploite alors la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\,f \wedge \vec{A} + f\,\overrightarrow{rot}\vec{A}$

$$\overrightarrow{rot}_M\left(\frac{\overrightarrow{j}(P)}{PM}\right) = \frac{1}{PM}\underbrace{\overrightarrow{rot}_M\left(\overrightarrow{j}(P)\right)}_{=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{grad}_M\left(\frac{1}{PM}\right)}_{-\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}}\wedge\overrightarrow{j}(P) = \overrightarrow{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(\mathcal{V})}\overrightarrow{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau}$$

4 Relations d'électrostatique et de magnétostatique

Relation locale	Relation globale	Commentaire	Potentiel
Maxwell-Gauss $div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss $\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\overrightarrow{E}$ n'est pas à flux conservatif	$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$
Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$	$\oint \overrightarrow{E}\overrightarrow{dl} = 0$	$\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Flux $div\overrightarrow{B} = 0$	$\oiint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = 0$	$\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif	$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{A}$
Maxwell-Ampère $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$	Théorème d'Ampère $\oint \overrightarrow{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlace}$	$\overrightarrow{B}$ n'est pas à circulation conservative	$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = -\mu_0 \overrightarrow{j}$