OMPP 4
Les relations locales de la magnétostatique

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

1 Équation locale de conservation de la charge

Courant et charges sont intimement reliés par la loi de conservation de la charge

1.1 Cas d'un système unidimensionnel cartésien

- On se place dans le cadre d'un modèle *unidimensionnel* en géométrie *cartésienne* : c'est à dire que le seul paramètre d'espace intervenant dans les grandeurs sera noté x :

$$\rho(M,t) = \rho(x,t) \qquad et \qquad \vec{j}(M,t) = j_x(x,t)\vec{e}_x$$

- Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation suivante :

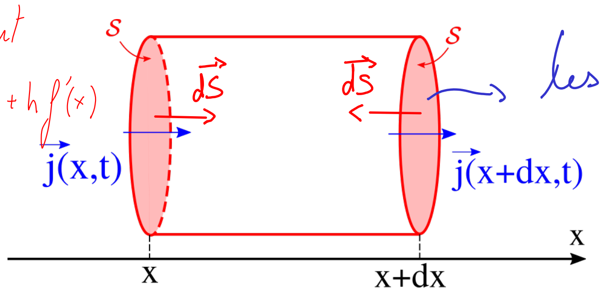
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

traduit le caractère conservatif de la charge.

✎ Démontrer à l'aide du schéma suivant l'équation de conservation de la charge en 1 dimension

On rappelle le développement de Taylor : $f(x+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x) + h f'(x)$

Soit $f(x+dx) \underset{dx \to 0}{\longrightarrow} f(x) + \frac{df}{dx} dx$



les surfaces sont orientées vers l'intérieur, on regarde les charges qui rentrent

La charge entrant par la face située à l'abscisse x est :

$$\delta Q_x = \vec{j}(x,t)(S\vec{u}_x)\,dt = j(x,t)\,S\,dt$$

La charge entrant par la face située à l'abscisse x + dx est :

$$\delta Q_{x+dx} = \vec{j}(x+dx,t)(-S\vec{u}_x)\,dt = -j(x+dx,t)\,S\,dt$$

La charge totale qui est rentrée dans le volume entre t et t + dt est donc :

$$\delta Q = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = \left(j(x,t) - j(x+dx,t)\right) S\,dt = -\frac{\partial j}{\partial x} dx\,S\,dt$$

La charge électrique dans le volume a variée entre t et t + dt de la quantité :

$$dQ = \rho(x,t+dt)V - \rho(x,t)V = \left(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\right) S\,dx = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\,S\,dx$$

La charge ne peut pas être créée ou détruite donc la variation de la charge à l'intérieur du volume est due aux charges qui sont rentrées dans le volume :

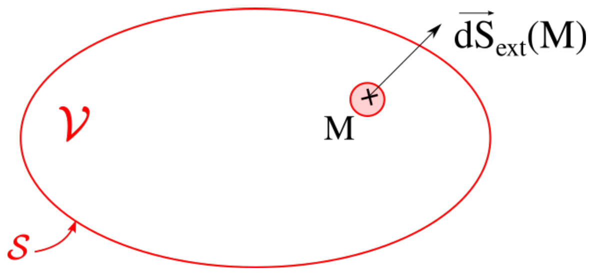
$$\delta Q = dQ \quad \text{donc} \quad -\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{puis} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

1.2 Cas général

L'équation locale de conservation de la charge **traduit mathématiquement le caractère conservatif de la charge. :**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + div(\vec{j}(M,t)) = 0}$$

✎ Démontrer l'équation de conservation de la charge à l'aide du dessin suivant et de l'égalité $\dfrac{dQ}{dt} = I$



La charge contenue dans le volume V est :

$$Q = \iiint_V \rho(M,t)\, d\tau$$

La charge peut varier au cours du temps si et seulement si des charges traversent la surface S

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\oiint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}_{ext}$$

Si le courant est positif, comme la surface est orientée vers l'extérieur cela veut dire que le volume perd de la charge (positrons qui sortent ou électrons qui rentrent). Sa charge doit donc diminuer.

On a alors : $\dfrac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho(M,t)\, d\tau\right) = -\oiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}_{ext}$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski : $\iiint \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = \iiint -div\, \vec{j}\, d\tau$

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - div\, \vec{j}\right) d\tau = 0$$

Ceci reste vrai pour tout V donc : $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} - div\, \vec{j} = 0}$

1.3 Cas particulier du régime stationnaire

1.3.1 Le vecteur densité de courant est à flux conservatif

En régime statique, le vecteur densité de courant est à flux conservatif :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{j}(M)\right) = 0}$$

Preuve : En régime statique (= stationnaire) les grandeurs sont indépendantes du temps

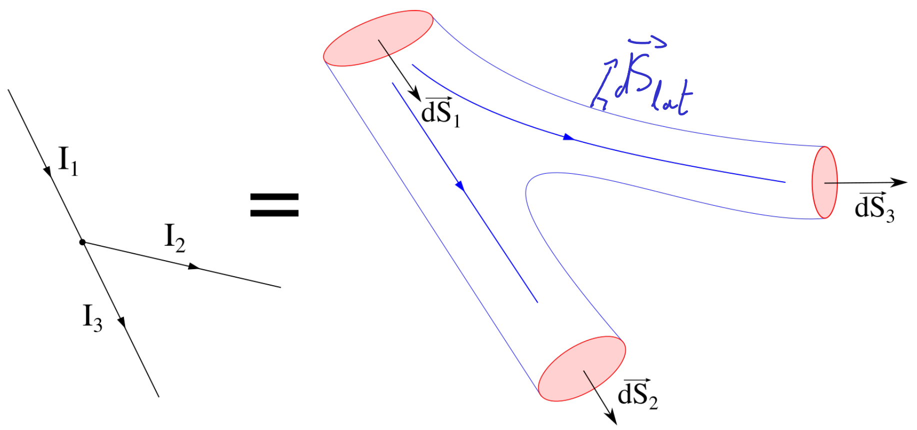
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc $\boxed{div\ \vec{j} = 0}$

1.3.2 Intensité du courant traversant un contour orienté - loi des nœuds

❑ **On peut parler de *l'intensité I du courant traversant un contour orienté.***
❑ **On peut parler de *l'intensité I d'un tube de courant orienté.***
❑ **On peut démontrer la loi des nœuds.**

Les démonstrations des deux premiers points ont été effectuées avec le champ magnétique $\vec{B}$, elles sont identiques avec la densité volumique de courant $\vec{j}$.

✎ Démontrer la loi des noeuds en s'appuyant sur le schéma suivant d'un tube de courant de épousant la forme d'un noeud.



$$0 = \iiint div\ \vec{j}\ d\tau \underset{G.O}{=} \oiint \vec{j}\cdot\vec{dS}$$

$\vec{j} \perp \vec{dS}_{lat}$ sur un tube de champs

$$= \iint_{S_1} \vec{j}\cdot\underbrace{\vec{dS}}_{-\vec{dS}_1} + \iint_{S_2} \vec{j}\cdot\underbrace{\vec{dS}}_{\vec{dS}_2} + \iint_{S_3} \vec{j}\cdot\underbrace{\vec{dS}}_{\vec{dS}_3} + \cancel{\iint_{S_{lat}} \vec{j}\cdot\vec{dS}}\ 0$$

$$= -\iint \vec{j}\cdot\vec{dS}_1 + \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}_2 + \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}_3$$

$$\boxed{0 = -I_1 + I_2 + I_3}$$

2 Equation de Maxwell-Flux - Champ magnétique à flux conservatif

2.1 Relation locale : équation de Maxwell-Flux

L'équation de Maxwell-Flux est le deuxième des quatre postulats fondamentaux de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell. Elle postule[a] que la divergence du champ magnétique $\vec{B}$ est nulle :

$$\boxed{div\overrightarrow{B}(M) = 0}$$

[a] Cette équation est valable en régime statique <u>et</u> en régime quelconque

2.2 Relation intégrale : Conservation du flux du champ magnétique (rappel)

Soit $(\mathcal{S})$ une surface fermée[a]. L'équation de Maxwell-Flux permet de montrer que le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée est nul :

$$\boxed{\oiint_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{B}(P).d\overrightarrow{S}_{ext}(P) = 0}$$

On dit que $\vec{B}$ est à flux conservatif.

[a] Rappelons qu'une surface fermée est une surface engendrant un volume.

✎ Démontrer la propriété précédente

Soit S une surface fermée qui délimite un volume V :

$$\iiint_V div\,\overrightarrow{B} = 0 \underset{G.O}{\Longrightarrow} \oiint_S \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = 0$$

B est à flux conservatif