OMPP 4
Les relations locales de la magnétostatique

École Centrale Pékin

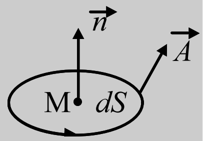
2019-2020

Table des matières

3 L'opérateur rotationnel

3.1 Définition intrinsèque

La circulation $\delta\mathcal{C}$ d'un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ le long d'un contour fermé *élémentaire* orienté entourant une surface *élémentaire* $d\vec{S}$ (orientée selon la règle de la main droite) au voisinage du point M, s'écrit :



$$\boxed{\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}(M,t)\,.d\vec{S}}$$

ce qui définit *de manière intrinsèque* l'opérateur <u>rotationnel</u>.

3.2 Propriétés

1. **L'opérateur <u>rotationnel</u> transforme un *champ vectoriel* en un *champ vectoriel*.**
2. **L'opérateur <u>rotationnel</u> est un *opérateur linéaire*.**

✎ Démontrer la linéarité du rotationnel.

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux champs vectoriels

On considère un contour élémentaire δC orienté entourant une surface élémentaire $d\vec{S}$ orientée par la règle de la main droite.

$$\delta C(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}) = \oint_\Gamma (\alpha\vec{A}+\beta\vec{B})\,d\vec{l} = \alpha\overbrace{\oint_\Gamma \vec{A}\,d\vec{l}}^{\delta C_{\vec{A}}} + \beta\overbrace{\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l}}^{\delta C_{\vec{B}}}$$

On a donc : $\overrightarrow{rot}(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B})\,d\vec{S} = \alpha\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}.d\vec{S} + \beta\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B}.d\vec{S}$

Cette relation est valable pour tout $d\vec{S}$ donc : $\boxed{\overrightarrow{rot}(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}) = \alpha\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \beta\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B}}$

3.3 Expressions explicites

3.3.1 Coordonnées cartésiennes

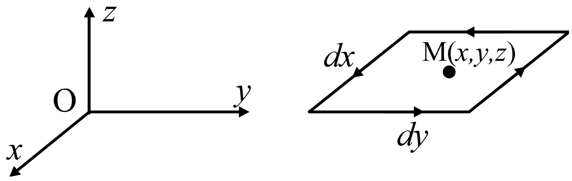
Soit le champ vectoriel $\vec{A}(M,t) = A_x(M,t)\vec{e}_x + A_y(M,t)\vec{e}_y + A_z(M,t)\vec{e}_z$ alors

$$\heartsuit\ \boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{A}(M,t) = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right.}\ \heartsuit$$

On voit qu'en **coordonnées cartésienne** $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}(M,t)$ peut se calculer comme $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M,t)$

<u>Attention</u> : **Ce calcul n'est valable qu'en coordonnées cartésiennes !** En coordonnées cylindriques et sphériques on ne peut pas simplement effectuer le produit vectoriel entre l'opérateur Nabla et le champ de vecteur pour calculer la divergence.

Preuve (hors-examen) : Calculons la circulation d'un champ $\vec{A}(M,t)$ le long d'un contour élémentaire rectangulaire, orthogonal à $\vec{e}_z$:



$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= A_y(x+\frac{dx}{2},y,z).dy - A_y(x-\frac{dx}{2},y,z).dy - A_x(x,y+\frac{dy}{2},z).dx + A_x(x,y-\frac{dy}{2},z).dx \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x}.dx\,dy - \frac{\partial A_x}{\partial y}.dx\,dy \end{aligned}$$

En divisant par $dS = dx\,dy$, on en déduit la coordonnée suivant z du rotationnel :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

En procédant de la même manière avec des contours orthogonaux à $\vec{e}_x$ et à $\vec{e}_y$, on en déduit :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}(M,t) = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right.$$

3.3.2 Autres systèmes de coordonnées

Si vous deviez avoir besoin de l'expression du rotationnel d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques ou sphériques, l'énoncé de l'exercice vous les rappellerait.

Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} A_r(r,\theta,z,t) \\ A_\theta(r,\theta,z,t) \\ A_z(r,\theta,z,t) \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} A_r(r,\theta,\varphi,t) \\ A_\theta(r,\theta,\varphi,t) \\ A_\varphi(r,\theta,\varphi,t) \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right\} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right\} \\ \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right\} \\ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\} \end{pmatrix}$

3.4 Composition d'opérateurs

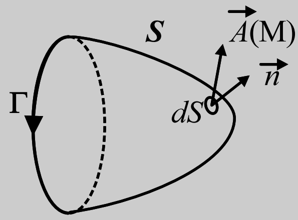
Soient $\vec{A}$ un champ de vecteurs et f un champ de scalaires.

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)(M,t)}_{=\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}f(M,t)\right)} = \overrightarrow{0} \qquad \textbf{et} \qquad \underbrace{div\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}(M,t)\right)}_{=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}(M,t)\right)} = 0}$$

3.5 Théorème de Green-Stokes

3.5.1 Enoncé

Soit $\mathcal{S}$ une surface *quelconque* s'appuyant sur un contour fermé Γ ($\mathcal{S}$ et Γ sont orientés de manière cohérentes selon la règle de la main droite). On peut exprimer la circulation de $\vec{A}(M,t)$ le long de Γ en calculant le flux de $\overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M,t)$ à travers la surface $\mathcal{S}$:



$$\boxed{\iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M,t)\cdot d\overrightarrow{S}(M) = \oint_{M\in\Gamma} \overrightarrow{A}(M,t)\cdot d\overrightarrow{\ell}(M)}$$

3.5.2 Conséquence

Un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ est à **circulation conservative** dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace si et seulement si :

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{D}, \forall t\in\mathcal{I} \quad \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M,t) = \overrightarrow{0}}$$

On peut faire l'analogie avec les champ vectoriels $\vec{B}(M,t)$ à **flux conservatifs** pour lesquels

$$\mathrm{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0$$

✎ Que vaut $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}$ en électrostatique ?

3.6 Représentation visuelle du rotationnel

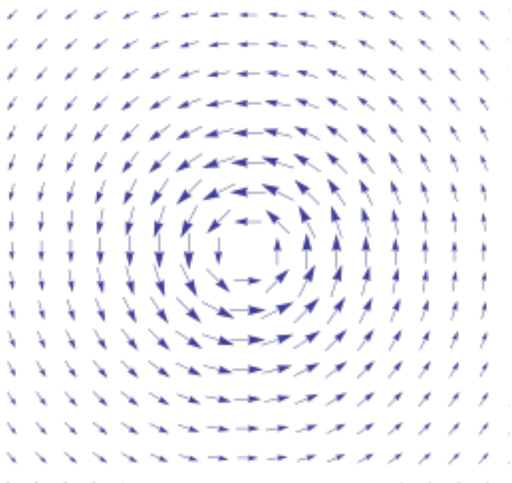


Figure 1 – Exemple d'un champ de vecteurs à rotationnel non nul

4 Rotationnel du champ magnétique en régime stationnaire

4.1 Équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire

L'équation de Maxwell-Ampère en *régime stationnaire* est :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}(M) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M)}$$

4.2 Relation intégrale : théorème d'Ampère

Soit un contour fermé et <u>orienté</u>, la circulation du champ magnétostatique le long de ce contour est égale au produit de la perméabilité du vide μ_0 par l'intensité enlacée I_{enl} par le contour :

$$\boxed{\oint_{M\in(\Gamma)} \overrightarrow{B}(M).d\overrightarrow{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint_{M\in(S)} \overrightarrow{j}(M).d\overrightarrow{S}(M)}_{\triangleq I_{enl}}}$$

✎ Preuve :

D'après l'équation de Maxwell-Ampère statique

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$ donc $\iint_S \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}\ d\overrightarrow{S} = \iint_S \mu_0 \overrightarrow{j}$

Or d'après le théorème de Stokes $\iint_{S_\Gamma} \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = \oint_\Gamma \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l}$

On a donc $\oint_\Gamma B.d\overrightarrow{l} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S_\Gamma} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}}_{I_{enlacé}}$

5 Relations d'électrostatique et de magnétostatique

Relation locale	Relation globale	Commentaire	Potentiel
Maxwell-Gauss $div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss $\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\overrightarrow{E}$ n'est pas à flux conservatif	$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$
Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$	$\oint \overrightarrow{E}\overrightarrow{dl} = 0$	$\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Flux $div\overrightarrow{B} = 0$	$\oiint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = 0$	$\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif	
Maxwell-Ampère $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$	Théorème d'Ampère $\oint \overrightarrow{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlace}$	$\overrightarrow{B}$ n'est pas à circulation conservative	