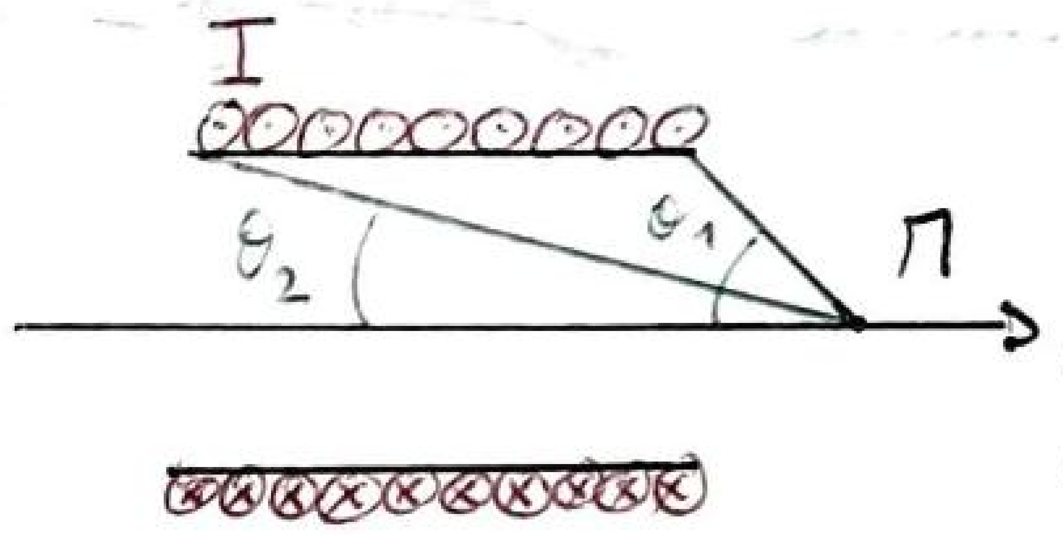
OMPP

TD7 - Correction

Ex 1 : Le solenoïde infini



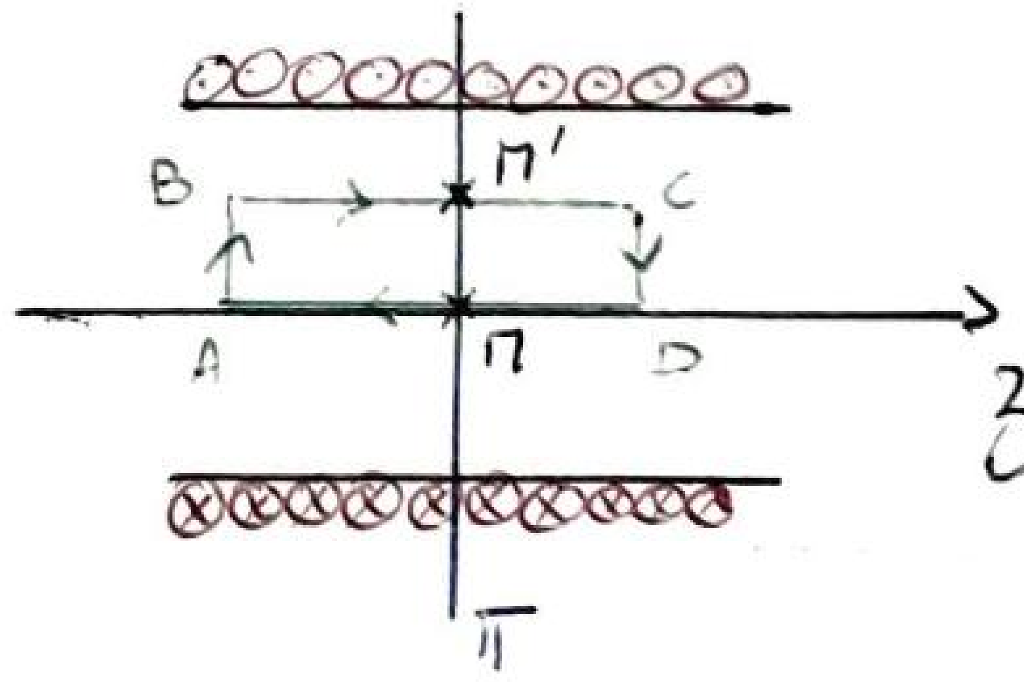
On a montré que sur l'axe

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\vec{u}_z$$

Pour un solenoïde infini $\theta_1 \to \pi$ et $\theta_2 \to 0$ donc

$$\boxed{\vec{B}_{Axe}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z}$$

Determinons le champ magnétique en dehors de l'axe



Le plan perpendiculaire à l'axe Oz est un plan de symétrie donc $\vec{B}(M') \propto \vec{e}_z$

Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation selon Oz donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z}$

Appliquons le théorème d'Ampère sur un contour passant par M et M', ABCD.

Scanned by TapScanner

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = 0 = \cancel{\int_A^B \vec{B}\cdot\vec{dl}} + \int_B^C \vec{B}\cdot\vec{dl} + \cancel{\int_C^D \vec{B}\cdot\vec{dl}} + \int_D^A \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

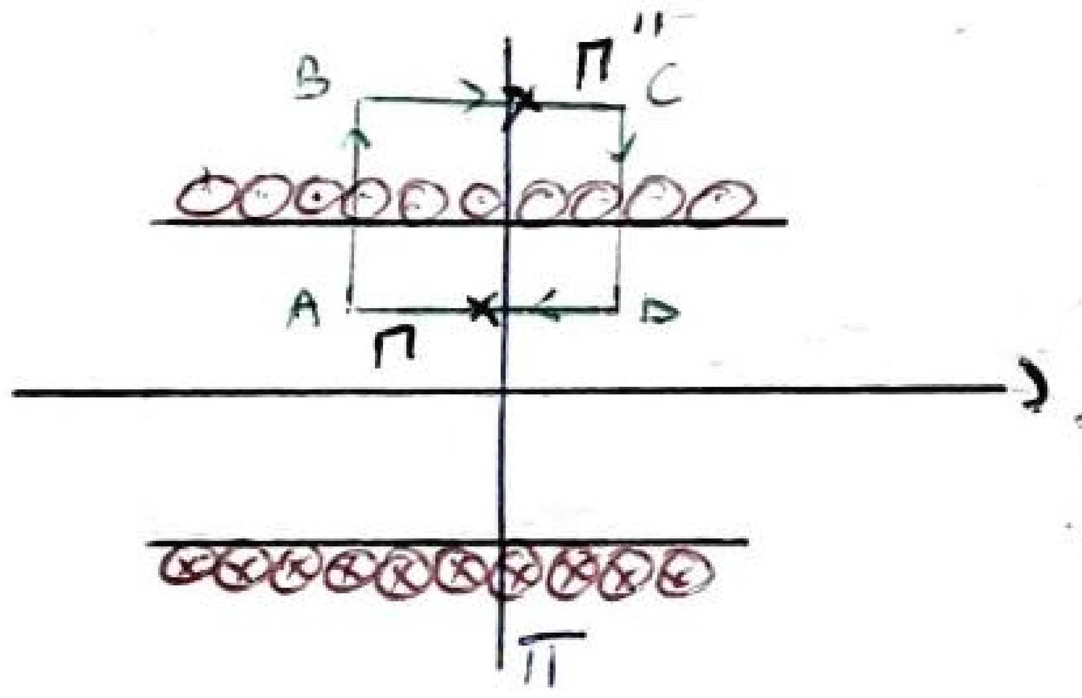
$\vec{B} \perp \vec{dl}$ $\quad$ $\vec{B} \perp \vec{dl}$

$$= B(M')\cdot BC - B(M)\cdot DA$$

Finalement $\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$

Ainsi partout à l'intérieur du cylindre $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u_z}}$

Faisons de même pour $B_{ext}(M'')$



Pour les mêmes raisons que précédemment : $\boxed{\vec{B}(M'') = \vec{B}(r)\,\vec{u_z}}$

On applique le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = -\mu_0 N I = \int_B^C \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_D^A \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

Donc $\displaystyle\int_B^C \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(M'')\cdot BC = -\mu_0 N I - \int_D^A \vec{B}\cdot\vec{dl}$

$$= -\mu_0 N I + B(M)\,DA$$

$$= -\mu_0 N I + \mu_0 \frac{N}{DA} I \times DA$$

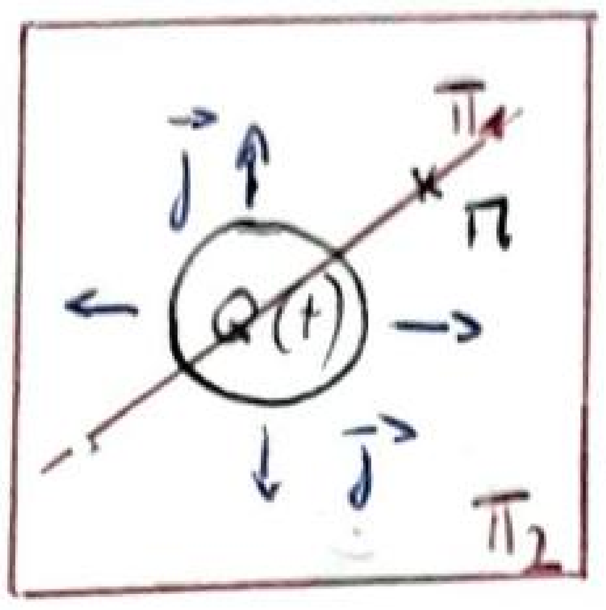
$$= 0$$

Ainsi $\boxed{\vec{B}_{ext}(M'') = \vec{0}}$

Scanned by TapScanner

Ex 2 : Emission isotrope de charge 1

1)



Les plans Π_1 et Π_2 sont des plans de symétrie des charges donc $\vec{E}$ leur appartient, Ainsi $\vec{E} \angle \vec{e_r}$

Il y a invariance par rotation autour de la boule donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}}$

Les plans Π_1 et Π_2 sont aussi plans de symétrie des courants donc $\vec{B}$ leur est perpendiculaire. Ainsi $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

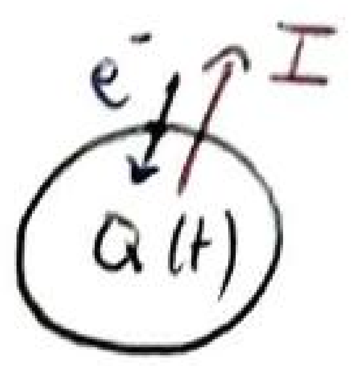
2) En appliquant le théorème de Gauss à la surface de la sphère sur une surface de Gauss de rayon R

On a :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e_r}$$

Ainsi $\boxed{\vec{j} = \frac{\gamma Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e_r}}$

3)



Si un courant sort de la boule alors la charge de la boule diminue donc

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -I}$$

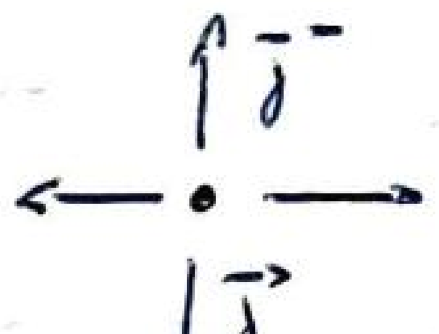
Ainsi $\frac{dQ}{dt} = -\oiint \vec{j} \cdot \vec{dS} = -j\, 4\pi R^2 = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} Q$

On obtient l'équation $\frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} Q = 0$

Par conséquent $\boxed{Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$

Plus le fluide est conducteur (γ grand) plus le temps caractéristique est petit et donc la boule se décharge vite.

Ex 3: Emission isotrope de charges 2



Soit v_0 la vitesse des électrons.

Pour $r > v_0 t$ aucun électron n'a encore atteint cette partie de l'espace donc $\rho(r,t) = 0$

Pour $r < v_0 t$, les électrons qui sont entre les sphères de rayon r et $r + dr$ on été émis entre $t - \frac{r}{v_0}$ et $t - \frac{r + dr}{v_0}$ donc pendant $dt = \frac{dr}{v_0}$

Or $\frac{dq}{dt} = -e\alpha$ donc $dq = -e\alpha\, dt = -e\alpha \frac{dr}{v_0}$

Cette charge est repartie entre les 2 sphères de rayons

r et $r + dr$ donc $\rho = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{4\pi r^2 dr}$

Finalement $\boxed{\rho(r,t) = \frac{-e\alpha}{4\pi r^2 V_0}}$

Scanned by TapScanner