OMPP
TD8

École Centrale Pékin

2019-2020

Applications du cours

Exercice 1 : Sextique

1. Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{A}(M) = y^2 z\overrightarrow{e_x} + xz^2\overrightarrow{e_y} + x^2 y\overrightarrow{e_z}$. Calculer $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}(M)$.
2. Soit le champ de scalaires $\Phi(M) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 2y^2 + z^2\right)$. Calculer $\overrightarrow{grad}\ \Phi(M)$.
3. Le champ $\overrightarrow{C}(M) = x\overrightarrow{e_x} + 2y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ est-il à circulation conservative ? (on justifiera)
4. La figure 1 représente deux courbes situées dans le plan $z = 0$: le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2+y^2 = 1$ et la «sextique non rationnelle» $(\mathcal{S})$ d'équation $(x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$. On note $A(-1, 0)$ et $B(0, 1)$.

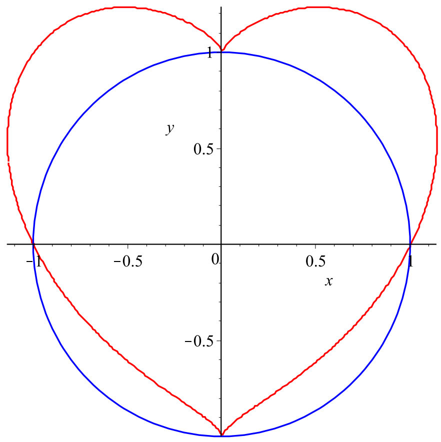

Figure 1 – Sextique non rationnelle $(\mathcal{S})$ et cercle $(\mathcal{C})$

Déterminer la valeur des deux intégrales curvilignes $I = \int_{A\ M\in(\mathcal{C})}^{B} \overrightarrow{C}(M)\cdot d\overrightarrow{M}$ et $J = \int_{A\ M\in(\mathcal{S})}^{B} \overrightarrow{C}(M)\cdot d\overrightarrow{M}$.

S'entraîner

Exercice 2 : Champ magnétique au voisinage de l'axe de révolution d'une spire

Une spire de rayon a parcourue par un courant I crée un champ magnétique $\vec{B}(M)$. L'axe (Oz) désigne l'axe de symétrie de révolution de la spire. Le champ magnétique créé en tout point de l'espace par cette spire est de la forme *en coordonnées cylindriques* :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$$

On sait que $B_r(r = 0, z) = 0$ et on connaît la fonction $z \to B_z(r = 0, z)$ dont l'expression est inutile dans cet exercice.

1. Montrer, à l'aide des deux méthodes suivantes, qu'au voisinage de l'axe $z'z$ (au premier ordre en r/a) :
$$\overrightarrow{B}(M) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z)\overrightarrow{e_r} + B_z(0, z)\overrightarrow{e_z}$$
   a) En exprimant le flux du champ magnétique à travers le cylindre infinitésimal d'axe z, situé entre z et $z + dz$
   b) En utilisant l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques.
2. Les figures 2 et 3 représentent les lignes de champ magnétique. Peut-on en déduire dans quelle zone le champ magnétique est le plus intense ?

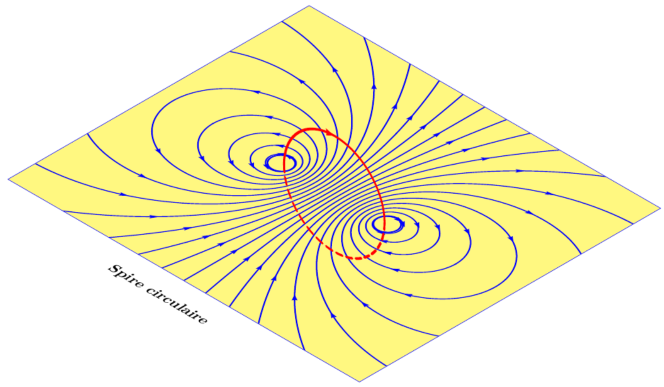

Figure 2 – Lignes de champ magnétostatique créées par une spire circulaire parcourue par un courant stationnaire (3D)

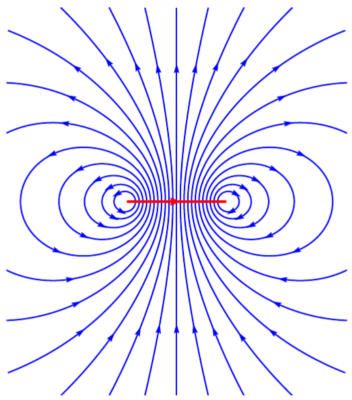

Figure 3 – Lignes de champ magnétostatique créées par une spire circulaire parcourue par un courant stationnaire (2D)

Formulaire

Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} A_r(r,\theta,z,t) \\ A_\theta(r,\theta,z,t) \\ A_z(r,\theta,z,t) \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{A}(M,t) = \begin{pmatrix} A_r(r,\theta,\varphi,t) \\ A_\theta(r,\theta,\varphi,t) \\ A_\varphi(r,\theta,\varphi,t) \end{pmatrix}$
$div\,\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$div\,\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$