OMPP

TD8 - Correction

Ex 1 : Sextique

1) En coordonnées cartesiennes on a :

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 - 2xz \\ y^2 - 2xy \\ z^2 - 2yz \end{vmatrix}$$

2) En coordonnées cartesiennes on a :

$$\vec{grad}\,\phi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 2y \\ z \end{vmatrix}$$

3) On peut calculer rapidement que $\boxed{\vec{rot}\,\vec{C} = \vec{0}}$ donc $\vec{C}$ est à circulation conservative

On peut remarquer que $\vec{C} = \vec{grad}\,\phi$, or $\vec{rot}(\vec{grad}\,f) = \vec{0}$ pour tout f, donc $\vec{rot}\,\vec{C} = \vec{0}$

4) Comme $\vec{C} = \vec{\text{grad}}\,\phi$ on a : $\displaystyle\int_A^B \vec{C} \cdot d\vec{\Pi} = \int_A^B \vec{\text{grad}}\,\phi\, d\vec{\Pi}$

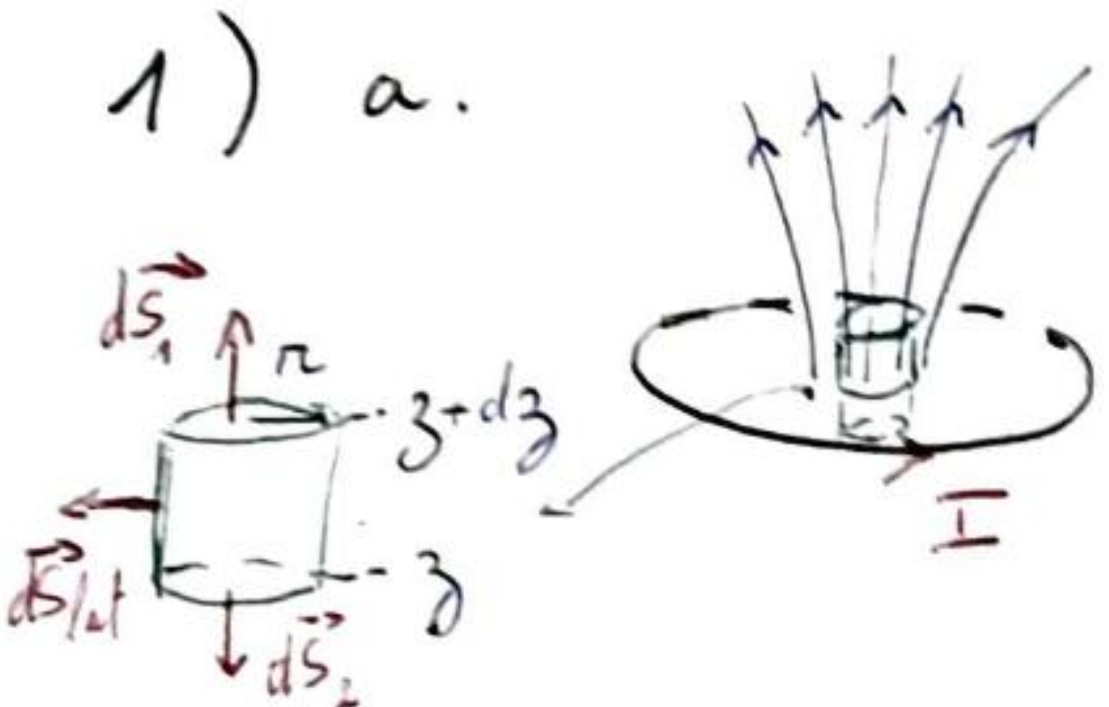
$$= \int_A^B d\phi$$

Ainsi $\displaystyle\int_A^B \vec{C} \cdot d\vec{\Pi} = \phi_B - \phi_A$

Donc $\displaystyle\int_{A\,(\Pi \in \mathcal{C})}^B \vec{C} \cdot d\vec{\Pi} = \int_{A\,(\Pi \in S)}^B \vec{C} \cdot d\vec{\Pi} = \frac{1}{2}(0+2+0) - \frac{1}{2}((-1)^2+0+0) = \frac{1}{2}$

Ex 2 : Champ magnétique au voisinage de l'axe de révolution d'une spire

1) a.



On considère le flux de $\vec{B}$ à travers un cylindre de rayon $r \ll a$ et de hauteur dz

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{S_1} \vec{B}(r, z+dz)\, d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B}(r,z)\, d\vec{S}_2 + \iint_{S_{lat}} \vec{B}(r,z)\, d\vec{S}_{lat}$$

Or $r \ll a$ donc $B(r) \sim B(0)$ et $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 \propto \vec{e_z}$ donc :

$$0 \simeq \iint_{S_1} B_z(0, z+dz)\, dS - \iint_{S_2} B_z(0,z)\, dS + \iint_{S_{lat}} B_r(0,z)\, dS$$

$$0 \simeq \iint_{S_1} \frac{\partial B_z}{\partial z}\, dz\, dS + \iint_{S_{lat}} B_r(0,z)\, dS$$

Comme le cylindre est petit on peut supposer que $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ ~ cst sur S_1 et $B_r(0,z)$ ~ cst sur S_{lat}

Donc $0 \simeq \frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)\, dz\, \pi r^2 + B_r(0,z)\, 2\pi r\, dz$

Ainsi $\boxed{B_r(0,z) \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)}$

et $\boxed{B(M) \sim -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)\vec{e_r} + B_z(0,z)\vec{e_z}}$

b. $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r}\left(B_r + r\frac{\partial B_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

D'après le developpement de Taylor $B_r(r,z) \sim B_r(0,z) + \frac{\partial B_r}{\partial r} r$

Donc $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \simeq \frac{1}{r}\left(B_r(0,z) + 2r\frac{\partial B_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

On sait de plus $B_r(0,z) = 0$ donc

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} \sim -\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(r,z) \sim -\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)$$

$$\boxed{B_r(r,z) \sim -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)}$$

Ainsi $\vec{B}(M) \approx -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)\,\vec{e_r} + B_z(r,z)\,\vec{e_z}$

Au premier ordre, pour r petit on a donc

$$\boxed{\vec{B}(M) \sim -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z)\,\vec{e_r} + B_z(0,z)\,\vec{e_z}}$$

2) Le champ magnétique est le plus intense là où les lignes de champ sont les plus resserées donc au centre