OMPP

TD9 - Correction

Ex 1 : potentiel vecteur

1) Calculons $\vec{rot}\,\vec{A}$, on choisit $\vec{B_0} \propto \vec{e_z}$

$\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{rot}\left(\frac{1}{2}\vec{B_0} \wedge \vec{OM}\right)$ or $\vec{B_0} \wedge \vec{OM} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -yB_0 \\ xB_0 \\ 0 \end{vmatrix}$

donc $\vec{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{yB_0}{2} \\ \frac{xB_0}{2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}B_0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2}B_0\right) \end{vmatrix} = B_0\vec{e_z}$

On a bien $\boxed{\vec{B_0} = \vec{rot}\,\vec{A}}$

2) Par ailleurs $\boxed{\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{yB_0}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}B_0\right) = 0}$

Le potentiel vecteur vérifie la jauge de Coulomb

Ex 2 : Potentiel vecteur d'un fil infini

1) On cherche $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$

en coordonnées cylindriques on a :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ \dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Or un plan perpendiculaire au fil est un plan d'antisymetrie donc $\vec{A}$ lui est perpendiculaire.

Ainsi $A_r = A_\theta = 0$ et $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$

On a donc $\boxed{\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0}$ et $\boxed{-\dfrac{\partial A_z}{\partial r} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

$\vec{A}$ ne dépend donc pas de θ, ce qui était attendu au vue des invariances.

On intègre la seconde relation : $\boxed{A_z = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + f(z)}$

2) En appliquant la jauge de Coulomb on a

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = f'(z) = 0$$

Ainsi f ne dépend pas de z, c'est une constante

On peut fixer le potentiel en choisissant une référence, par exemple $A_z = 0$ pour $r = r_0$ et on a alors $\boxed{\vec{A} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \dfrac{r}{r_0} \vec{e}_z}$

Ex 3 : Modèle du supraconducteur

1) L'équation de Maxwell-Ampère statique s'écrit $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Ainsi $\vec{rot}\,(\vec{rot}\,\vec{B}) = \mu_0 \vec{rot}\,\vec{j}$

$$\vec{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\,\vec{rot}\left(-\frac{\vec{A}}{\mu_0 \delta^2}\right)$$

Or $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ donc $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}}$ car $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$

2) $\vec{B} = B(x)\,\vec{u_z}$ donc $\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{d^2B}{dx^2}\vec{u_z}$ et on obtient

l'équation $\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}B = 0$ d'où $\boxed{B(x) = A\,\mathrm{ch}\frac{x}{\delta} + C.\,\mathrm{sh}\frac{x}{\delta}}$

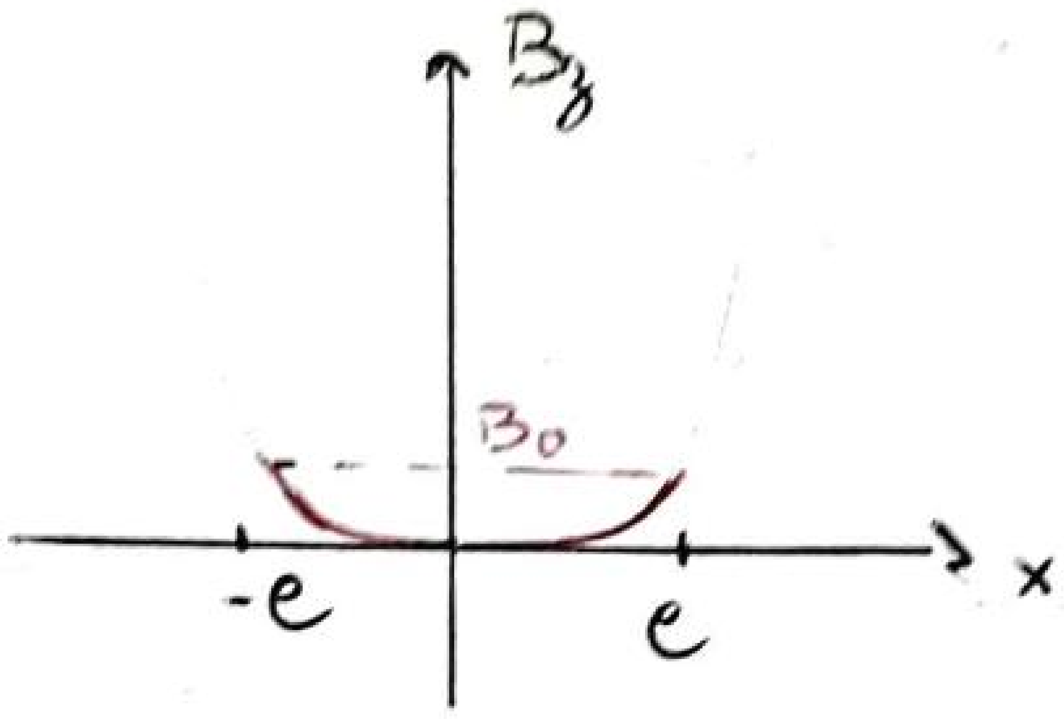
Si on suppose que le champ magnétique est continu à l'interface entre le matériau et l'extérieur on obtient :

$$\begin{cases} A\,\mathrm{ch}\,\frac{e}{\delta} + C\,\mathrm{sh}\,\frac{e}{\delta} = B_0 \\ A\,\mathrm{ch}\,\frac{-e}{\delta} + C\,\mathrm{sh}\,\frac{-e}{\delta} = B_0 \end{cases}$$

Ainsi $\begin{cases} 2C\,\mathrm{sh}\,\frac{e}{\delta} = 0 \\ 2A\,\mathrm{ch}\,\frac{e}{\delta} = 2B_0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} C = 0 \\ A = \frac{B_0}{\mathrm{ch}\frac{e}{\delta}} \end{cases}$

Puis $\boxed{\vec{B}(M) = B_0 \dfrac{\operatorname{ch}\frac{x}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{e}{\delta}} \vec{u}_z}$

Pour $\delta \ll e$ l'allure du champ magnetique dans le materiau est la suivante :



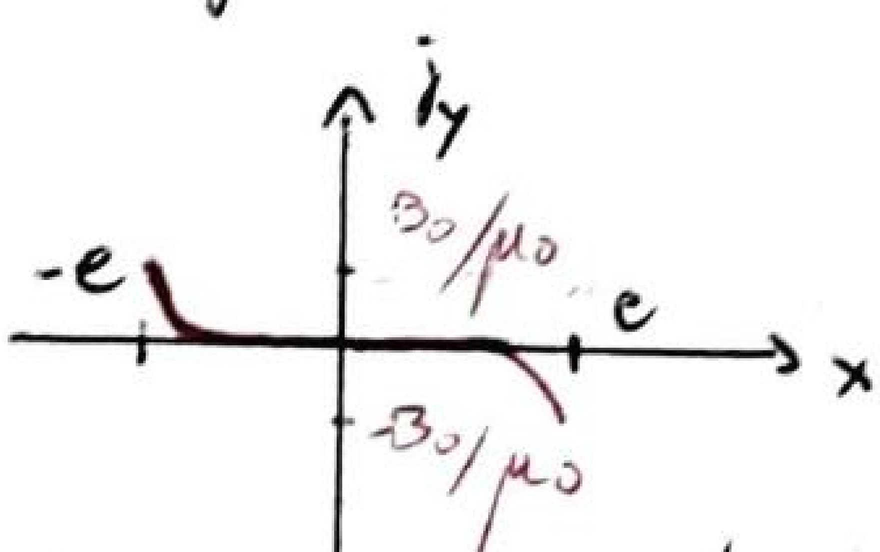
Le champ est presque nul dans le materiaux

3) On a $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\vec{B} = B(x)\vec{u}_z$

donc $-\dfrac{\partial B}{\partial x}\vec{u}_y = \mu_0 \vec{j}$

Ainsi $\boxed{\vec{j} = -\dfrac{B_0}{\mu_0} \dfrac{\operatorname{sh}\frac{x}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{e}{\delta}} \vec{u}_y}$

Pour $\delta \ll e$ l'allure de $\vec{j}$ dans le matériau est



le courant est presque nul

4) les courants sont antisymetriques par rapport au plan Oyz donc leur somme est nulle, ils n'influencent pas le champ exterieur