

# OPTIQUE 6 :

## Modèle ondulatoire de la lumière

École Centrale Pékin

Année 3

### Table des matières

<b>2</b>	<b>L'onde lumineuse monochromatique</b>	<b>2</b>
2.1	Hypothèse d'étude . . . . .	2
2.2	Expression(s) de l'onde lumineuse monochromatique . . . . .	2
2.3	Chemin optique et retard de phase . . . . .	3
2.4	Théorème de MALUS-DUPIN et différence de chemin optique . . . . .	5
2.5	Formes d'onde et déphasage . . . . .	7

## 2 L'onde lumineuse monochromatique

### 2.1 Hypothèse d'étude

Le milieu de propagation de la lumière est ici considéré comme un milieu **diélectrique, linéaire, isotrope et transparent** :

$$n(M) \in \mathbb{R}^a$$

a. On ne fait pas l'hypothèse d'homogénéité.

### 2.2 Expression(s) de l'onde lumineuse monochromatique

#### 2.2.1 Équation de propagation de l'onde lumineuse

Dans un milieu transparent, la vibration lumineuse  $s(M, t)$ , lorsqu'elle est définie, est solution de l'**équation d'Alembert de propagation de l'onde lumineuse** :

$$\Delta s(M, t) - \frac{1}{v(M)^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(M, t) = 0 \quad \text{où} \quad v(M) = \frac{c}{n(M)}$$

Suivant **la nature de la source et le milieu dans lequel la lumière se propage**, l'expression de l'onde lumineuse diffère.

#### 2.2.2 Forme des solutions

- L'onde lumineuse monochromatique définie ainsi :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

peut être solution de l'**équation de propagation de l'onde lumineuse** (cf. chapitre 1).

- On nomme :

- $\omega$  **la pulsation** (constante) ;
- $A(M)$  **l'amplitude** que l'on choisit positive ;
- $\varphi(M)$  **le retard de phase** au point M.

- Une **surface équiphasse**  $(\mathcal{S})_{\varphi_0}$  est le lieu des points de l'espace tels que  $\varphi(M) = \varphi_0$ .

Le choix d'une amplitude positive  $A(M)$  est toujours possible ; il suffit de remarquer que

$$-5 \cos(\omega t + \varphi(M)) = 5 \cos(\omega t + \varphi(M) + \pi)$$

#### 2.2.3 Notation complexe

Comme la vibration réelle  $s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$  est solution d'une équation d'onde linéaire à coefficients indépendants du temps, la vibration complexe suivante est solution de la même équation d'onde :

$$\underline{s}(M, t) = A(M) \exp[i(\omega t - \varphi(M))] = \underline{A}(M) \exp[i\omega t] \quad \text{où} \quad \underline{A}(M) = A(M) \exp[-i\varphi(M)]$$

L'amplitude complexe  $\underline{A}(M)$  contient les deux informations transportées par l'onde lumineuse :

- l'amplitude  $A(M) = |\underline{A}(M)|$  ;
- le retard de phase  $\varphi(M) = -\arg[\underline{A}(M)]$ .

### 2.2.4 Expression de l'éclairement

Pour une onde lumineuse monochromatique  $s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$ , lorsque le temps d'intégration  $\tau$  du capteur est très supérieur à la période  $T$  de l'onde lumineuse<sup>a</sup>, l'éclairement s'écrit :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{KA^2(M)}{2} = \frac{K}{2} \underline{A}(M) \underline{A}^*(M) = \frac{K}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t)$$

a. Cela concerne la plupart des capteurs optiques à l'exception de quelques capteurs dits **capteurs ultra-rapides**

*Démonstration.*

□

**Remarque 1 :** on préférera l'écriture  $\underline{A}(M) \underline{A}^*(M)$  plutôt que  $|\underline{A}(M)|^2$  car elle simplifie généralement les calculs

**Remarque 2 :** Beaucoup d'auteurs considèrent  $K = 2$  pour obtenir des expressions plus simples :

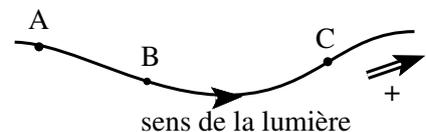
$$\mathcal{E}(M) = A^2(M) = \underline{A}(M) \underline{A}^*(M) = \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t)$$

## 2.3 Chemin optique et retard de phase

### 2.3.1 Rappel sur le chemin optique

On rappelle (voir chapitre 1) que le chemin optique  $(BC)$  parcouru par la lumière entre B et C le long du rayon lumineux dans un milieu transparent d'indice  $n$  est l'intégrale curviligne suivante (en mètre) :

$$(BC) = \int_{B, M \in \text{rayon lumineux}}^C n(M) ds$$



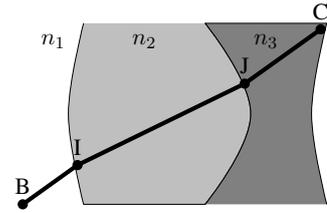
### 2.3.2 Exemples classiques

• **Cas où la lumière traverse un milieu homogène** Dans un milieu homogène et isotrope d'indice  $n$ , la lumière se propage en ligne droite de B à C. On calcule immédiatement :

$$(BC) \triangleq \int_{BC} n(M) dl = n \int_{BC} dl = nBC$$

• **Cas où la lumière traverse une succession de milieux homogènes**

Les points B et C peuvent être dans des milieux transparents homogènes différents. Sur la figure ci-contre, la lumière traverse des milieux d'indices respectifs  $n_1, n_2$  et  $n_3$ ; le rayon lumineux est une succession de segments de droite.



$$(BC) = (BI) + (IJ) + (JC) = n_1 BI + n_2 IJ + n_3 JC$$

**2.3.3 Surface d'onde**

**Définition :** Une **surface d'onde** relative à une source ponctuelle S est la surface formée par les points M tels que  $(SM) = cste$ .

**2.3.4 Lien entre le chemin optique et la variation du retard de phase**

Le long d'un rayon lumineux allant de B à C, les retards de phases sont liés par la relation :

$$\varphi(C) = \varphi(B) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (BC) \quad \underbrace{(\pm\pi)}_{\text{si exception}}$$

où  $\lambda_0$  désigne la longueur d'onde de la lumière **dans le vide**.

Démonstration. □

On en déduit qu'une **surface d'onde relative au point S** peut aussi être définie comme le lieu des points M tels que  $\varphi_S(M) = \varphi(M) - \varphi(S) = cste'$  (surface équiphase).

**Liste des exceptions :** Les exceptions évoquées dans les retards de phases sont quand le rayon lumineux entre B et C :

- subit une réflexion sur une surface métallique (cf. figure 1).
- subit une réflexion sur un milieu plus réfringent (cf. figure 2).
- passe par un point de convergence<sup>a</sup> (cf. figure 3).

a. Cette exception est connue sous le nom «d'inversion de phase de Gouy».

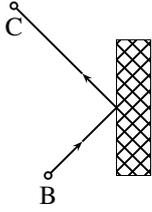


FIGURE 1 – Réflexion métallique

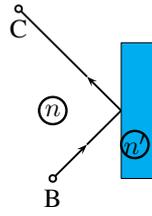


FIGURE 2 – Réflexion sur milieu plus réfringent  $n' > n$

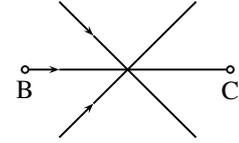


FIGURE 3 – Inversion de phase de Gouy

Dans les situations "exceptionnelles" citées ci-dessus, le calcul de  $A(C)$  à partir de  $A(B)$  mène à une valeur négative que l'on peut éviter en ajoutant ou enlevant  $\pi$  au retard de phase car :

$$A(M) \cos(\omega t - \varphi(M) \pm \pi) = -A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

## 2.4 Théorème de MALUS-DUPIN et différence de chemin optique

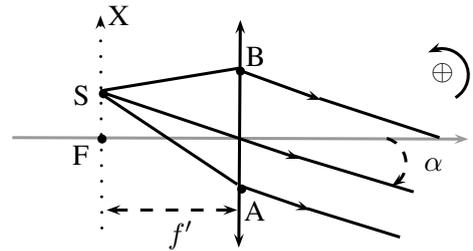
### 2.4.1 Rappel sur le théorème de MALUS-DUPIN

On rappelle (voir chapitre 1) que si on considère un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S, quel que soit le devenir de ce rayon (réflexion et réfraction), sa direction  $\vec{u}(M)$  en un point M est orthogonale à la surface équi-phase passant par M. On peut dire de manière équivalente que la direction de ce rayon  $\vec{u}(M)$  en un point M est orthogonale à la surface d'onde relative au point S passant par M.

### 2.4.2 Deux applications importantes du théorème de Malus

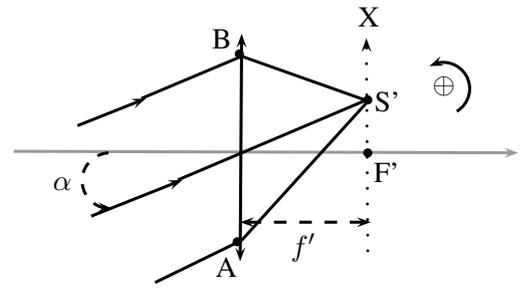
#### • Objet dans le plan focal objet d'une lentille convergente

A et B désignent les points situés juste à la sortie de la lentille convergente. On veut calculer la différence de chemin optique  $(SA) - (SB)$  en fonction de  $f'$ ,  $X_S$  et la distance  $AB$ . L'indice optique de l'air sera pris égal à 1.



**• Image dans le plan focal image d'une lentille convergente**

A et B désignent les points situés juste à l'entrée de la lentille convergente. On veut calculer la différence de chemin optique  $(AS') - (BS')$  en fonction de  $f'$ ,  $X_{S'}$  et la distance  $AB$ . L'indice optique de l'air sera pris égal à 1.



### 2.4.3 Théorème de Malus et discontinuité du faisceau : une subtilité !

Lorsque le faisceau n'est pas continu, le théorème de Malus persiste mais la surface d'onde n'est pas continue ce qui peut induire des résultats paradoxaux si l'on n'a jamais rencontré cette situation.

La figure 4 illustre une situation de discontinuité du faisceau de rayons : une onde plane est séparée en deux parties, l'une continuant dans l'air (milieu d'indice optique 1), l'autre traversant une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e$  (l'indice du verre est noté  $n > 1$  pour la longueur d'onde utilisée). Le plan en tiret passant par M est un plan d'onde : déterminer l'ensemble des points N tels que  $(MN) = ne$ .

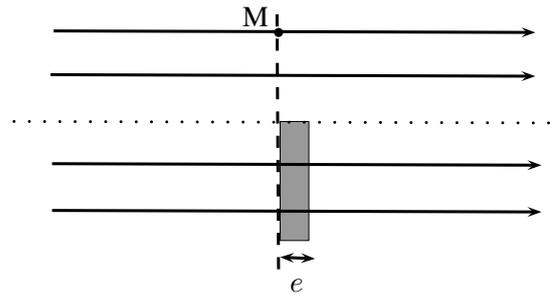


FIGURE 4 – Discontinuité du faisceau : discontinuité des plans d'onde

- Pour la portion de faisceau passant au-dessus de la lame :  $(MN) = MN = ne$  donc l'ensemble des points N est situés sur la portion de plan II.
- Pour la portion de faisceau traversant la lame :  $(MN) = nMN = ne$  d'où  $MN = e$ , l'ensemble des points N est situés sur le plan coïncidant avec la face arrière de la lame.

⇒ Ainsi, le plan d'onde après la lame est discontinu !

## 2.5 Formes d'onde et déphasage

Nous avons pour l'instant travaillé avec un modèle scalaire de la lumière écrit sous la forme générale :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Examinons de plus près le cas de l'onde sphérique et de l'onde plane harmonique dans un milieu homogène d'indice  $n$ .

### 2.5.1 Cas de l'onde sphérique harmonique

On travaille dans un milieu transparent homogène d'indice de réfraction  $n$ . Si une onde lumineuse monochromatique  $s(M, t)$  - à laquelle on associe l'onde complexe  $\underline{s}(M, t)$  - se propage depuis (*respectivement* vers) un point source S (*respectivement* un point image S'), on peut écrire l'onde sous la forme

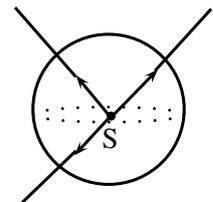
$$\underline{s}(M, t) = \frac{A_+}{r} \exp [i(\omega t - kr - \psi_+)] + \frac{A_-}{r} \exp [i(\omega t + kr - \psi_-)] \quad \text{où } k = \frac{\omega}{v} \quad \text{et } r = SM$$

Les surface d'onde sont alors des sphères centrées sur S et les rayons lumineux sont radiales. On peut alors séparer le problème en deux cas :

- **Onde sphérique harmonique divergente : cas d'une source ponctuelle dans un milieu homogène**

L'onde s'écrit sous la forme :

$$s(M, t) = \underbrace{\frac{A}{r}}_{A(M)} \cos \left( \underbrace{\omega t - kr - \psi}_{-\varphi(M)} \right) \quad \text{où } r = SM, k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}, A \text{ et } \psi \text{ réels,}$$



et correspond à **une onde sphérique divergente** et modélise **une source ponctuelle S**.

Dans ce cas,  $\varphi(M) = kr + \psi = \frac{2\pi n}{\lambda_0} SM + \psi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \psi$ , on constate que les surfaces d'onde  $(SM) = cste$  coïncident avec les surfaces équiphasés  $\varphi(M) = cste'$ .

Soient deux points M et N d'une onde sphérique se propageant depuis S dans un milieu d'indice optique  $n$ , de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

- si deux points M et N appartiennent au même cercle centré sur S : il n'y a pas de déphasage entre les deux points
- si deux points M et N n'appartiennent pas au même cercle centré sur S : le déphasage entre un point M et N est

$$\varphi(M) - \varphi(N) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \frac{2\pi n}{\lambda_0}MN$$

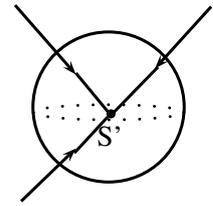
où  $(MN)$  est la distance radiale entre les deux cercles<sup>a</sup>

a. entre le cercle centré sur S auquel appartient M et le cercle centré sur S auquel appartient N

• **Onde sphérique harmonique convergente :**

L'onde s'écrit sous la forme :

$$s(M, t) = \underbrace{\frac{A}{r}}_{A(M)} \cos \left( \omega t + \underbrace{kr - \psi}_{-\varphi(M)} \right) \text{ où } r = SM, k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}, A \text{ et } \psi \text{ réels,}$$



correspond à **une onde sphérique convergente**.

Dans ce cas,  $\varphi(M) = -kr + \psi = -\frac{2\pi n}{\lambda_0}S'M + \psi = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(S'M) + \psi$ , **on constate que les surfaces d'onde**  $(S'M) = cste$  **coïncident avec les surfaces équi phases**  $\varphi(M) = cste'$ .

Soient deux points M et N d'une onde sphérique se propageant vers S' dans un milieu d'indice optique  $n$ , de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

- si les points M et N appartiennent au même cercle centré sur S' : il n'y a pas de déphasage entre les deux points
- si les points M et N n'appartiennent pas au même cercle centré sur S' : le déphasage entre un point M et N est

$$\varphi(M) - \varphi(N) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = -\frac{2\pi n}{\lambda_0}MN$$

où  $(MN)$  est la distance radiale entre les deux cercles<sup>a</sup>

a. entre le cercle centré sur S' auquel appartient M et le cercle centré sur S' auquel appartient N

• **Illustration :**

Un exemple simple d'expérience d'optique géométrique mettant en jeu des ondes sphériques consiste à créer l'image réelle A' d'un point lumineux A grâce à une lentille convergente. Les rayons issus de A sont associés à une onde sphérique **divergente** ; après réfraction dans la lentille, les rayons convergeant vers A' sont associés à une onde sphérique **convergente** : cf. figure 5.

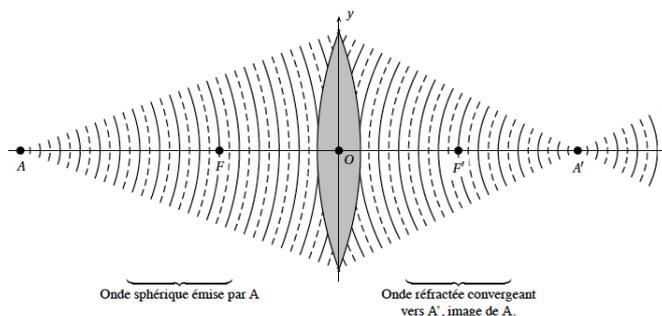


FIGURE 5 – Transformation d'une onde sphérique divergente en une onde sphérique convergente

### 2.5.2 Cas de l'onde plane progressive harmonique

On travaille dans un milieu transparent homogène d'indice de réfraction  $n$ . Si une onde lumineuse monochromatique  $s(M, t)$  se propage depuis une source ponctuelle à l'infini, on peut considérer l'onde sous la forme :

$$s(M, t) = A \cos \left( \underbrace{\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}}_{-\varphi(M)} - \psi \right) \quad \text{où} \quad \vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u} \quad \text{et} \quad r = SM$$

et correspond à **une onde plane progressive harmonique (O.P.P.H.)**.

• **Surface équiphasse :**

Nous savons que les rayons lumineux émis par cette source sont parallèles à  $\vec{k}$  (voir figure ci-contre). Les surfaces équiphasse sont les lieux où  $\vec{k} \cdot \vec{r} = cste$  : il s'agit d'une famille de plans orthogonaux à  $\vec{k}$  (d'où la dénomination d'onde plane).

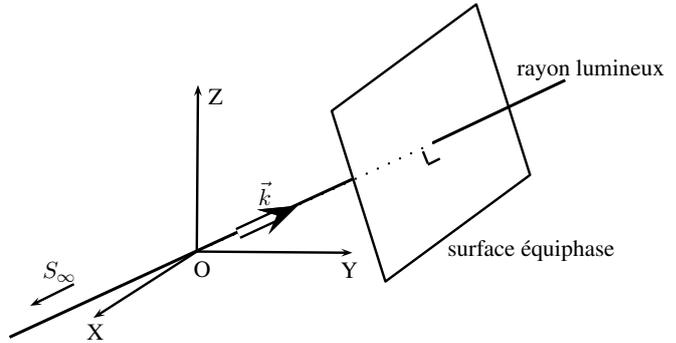


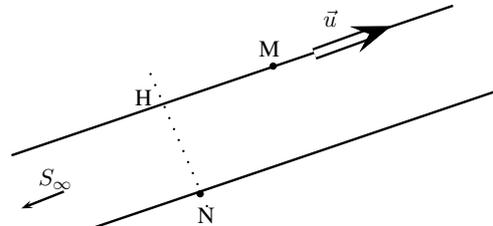
FIGURE 6 – Rayon lumineux modélisé par une O.P.P.H.

• **Déphasage entre deux points d'une onde plane :**

Soient deux points N et M d'une onde plane se propageant selon la direction  $\vec{u}$  dans un milieu d'indice optique  $n$ , de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

- si M et N appartiennent au même plan orthogonal aux rayons lumineux : il n'y a pas de déphasage entre les deux points
- si M et N sont quelconques : le déphasage entre ces deux points est :

$$\varphi(M) - \varphi(N) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{2\pi}{\lambda} (HM)$$



**Démonstration. méthode 1 :** utilisation de l'expression de l'onde

Le retard de phase en M s'écrit sous la forme :  $\varphi(M) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi$ . Ainsi, on a comme déphasage entre M et N :

$$\varphi(M) - \varphi(N) = (\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \psi) - (\vec{k} \cdot \overrightarrow{ON} + \psi) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} HM = \frac{2\pi}{\lambda} (HM)$$

**méthode 2 :** utilisation du théorème de MALUS :

On a vu précédemment que le retard de phase au point M s'écrit en fonction du retard de phase au point H appartenant au même rayon lumineux :

$$\varphi(M) = \varphi(H) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (HM)$$

Or H et N appartiennent au même plan d'onde et donc au même plan équiphasse : il n'y a pas de déphasage  $\varphi(H) = \varphi(N)$ . Ainsi :

$$\varphi(M) - \varphi(N) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (HM)$$

□