

OPTIQUE 7 : Interférences lumineuses

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

1 Conditions d'obtention d'interférences à deux ondes	2
1.1 Interférences, terme d'interférences, ondes cohérentes	2
1.2 Modèle de l'onde lumineuse monochromatique	2
1.3 Onde quasi-monochromatique : modèle des trains d'ondes	3
1.4 Synthèse et formule des interférences à deux ondes	5
1.5 Vocabulaire	6
2 Interférences de deux sources ponctuelles cohérentes à distance finie (ondes sphériques)	9
2.1 Géométries des franges d'interférences	9
2.2 Lemme géométrique	10
2.3 Étude du cas où les franges d'interférences sont des branches d'hyperbole assimilées à des franges rectilignes	10
2.4 Étude du cas où les franges d'interférences sont circulaires	11
3 Interférences de deux sources ponctuelles cohérentes situées à l'infini (ondes planes)	13
3.1 Réalisation expérimentale et modélisation	13
3.2 Figure d'interférences	13
4 Schéma de principe de quelques dispositifs interférentiels fonctionnant par division du front d'onde	15
4.1 Miroirs de Fresnel	15
4.2 Dispositif des trous de Young	15

1 Conditions d'obtention d'interférences à deux ondes

1.1 Interférences, terme d'interférences, ondes cohérentes

Définition : On parle d'**interférences** lorsque, en présence de plusieurs faisceaux lumineux éclairant la même région de l'espace, l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ (ou l'intensité lumineuse) n'est pas identique à la somme des éclairagements correspondant à chaque faisceau, pris séparément :

$$\mathcal{E}(M) \neq \sum_i \mathcal{E}_i(M)$$

La différence $\mathcal{E}(M) - \sum_i \mathcal{E}_i(M)$, porte le nom de **terme d'interférences**.

Définition : Des ondes sont dites **cohérentes** lorsque leur superposition conduit à un terme d'interférences non nul. Au contraire, lorsque le terme d'interférences est nul, les deux ondes sont **incohérentes**.

1.2 Modèle de l'onde lumineuse monochromatique

1.2.1 Condition de cohérence de deux ondes monochromatiques

Théorème - Cohérence de deux ondes : Deux ondes **monochromatiques**

$s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$ et $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$ sont cohérentes seulement si elles sont **synchrones** c'est-à-dire $\omega_1 = \omega_2$.

Démonstration. D'après la formule de l'éclairement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= K \langle s^2(M, t) \rangle_\tau \\ &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle_\tau \\ &= K \langle s_1(M, t)^2 + s_2(M, t)^2 + 2s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle_\tau \\ &= \underbrace{K \langle s_1(M, t)^2 \rangle_\tau}_{=\mathcal{E}_1(M)} + \underbrace{K \langle s_2(M, t)^2 \rangle_\tau}_{=\mathcal{E}_2(M)} + \underbrace{2K \langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle_\tau}_{\text{terme d'interférence}} \end{aligned}$$

On obtient pour le terme d'interférences :

$$\begin{aligned} \langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle_\tau &= A_1(M)A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle_\tau \\ &= \frac{A_1(M)A_2(M)}{2} \left[\underbrace{\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle_\tau}_{=0} + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle_\tau \right] \end{aligned}$$

On a alors $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle_\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$

Ainsi, il y a interférences (terme d'inférences $\neq 0$ ou $\mathcal{E}(M) \neq \sum_i \mathcal{E}_i(M)$) si et seulement si $\omega_1 = \omega_2$.

Dans ce cas :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + K A_1(M) A_2(M) \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

Or, on sait que : $\mathcal{E}_i(M) = \frac{K A_i^2(M)}{2}$ on obtient :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)}\sqrt{\mathcal{E}_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

□

1.3 Onde quasi-monochromatique : modèle des trains d'ondes

Les sources de lumière réelles ne produisent pas une onde lumineuse monochromatique, mais **quasi-monochromatique**. En adoptant le modèle de la succession des trains d'ondes évoqué au chapitre précédent et que nous rappelons brièvement dans ce paragraphe, nous allons pouvoir rendre compte de ce fait expérimental.

1.3.1 Rappel du modèle des trains d'ondes

La lumière produite par un ensemble d'atomes (lampe spectrale ou LASER par exemple) émettant sur une seule transition atomique (de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$) sera modélisée par une onde lumineuse quasi-monochromatique :

- d'amplitude $A(M)$: égale à l'amplitude moyenne des trains d'ondes ;
- de retard de phase en un point M : $\varphi(M) + \phi(t)$ où $\varphi(M)$ est le terme dû à la propagation de l'onde - identique à celui rencontré dans le cas d'une onde monochromatique- et $\phi(t)$ "la phase à l'émission". La valeur de cette dernière fonction est aléatoirement distribuée sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ en changeant de valeur tous les τ_c , durée appelée **temps de cohérence** ($\approx 10^{-11}$ s, pour la lumière quasi-monochromatique émise par une lampe spectrale).

On a représenté sur la figure 1, l'onde lumineuse $s(M, t)$ en un point M ainsi que la fonction $\phi(t)$.

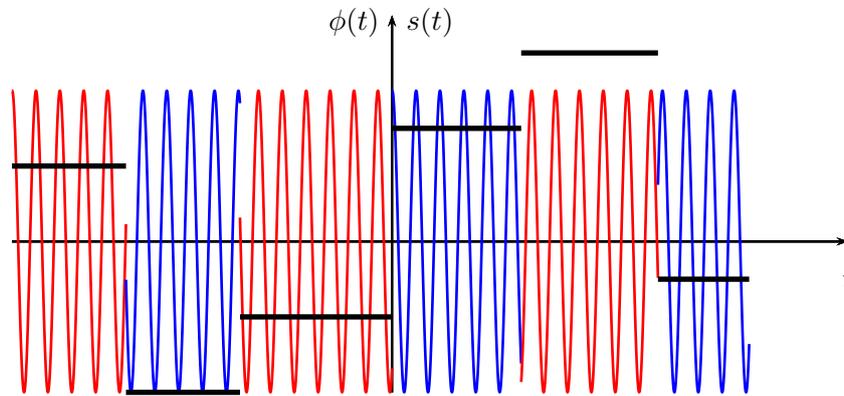


FIGURE 1 – Une succession de trains d'ondes avec $s(t)$ en rouge et bleu et $\phi(t)$ en gras et noir

1.3.2 Condition de cohérence de deux ondes quasi-monochromatiques

Théorème - Cohérence de deux ondes quasi-monochromatiques : Deux ondes **quasi-monochromatiques** sont cohérentes si et seulement si :

- elles sont synchrones ;
- leur déphasage est constant ou varie très lentement de manière à être quasiment constant sur une durée égale au temps de réponse du détecteur utilisé.

En pratique, on ne peut observer d'interférences entre deux ondes quasi-monochromatiques que si elles sont issues du **même train d'onde** et donc de la **même source mère**.

Démonstration. Reprenons les calculs précédents en ajoutant les phases à l'émission :

$$\begin{aligned} \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle_\tau &= A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M) - \phi_1(t)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M) - \phi_2(t)) \rangle_\tau \\ &= \frac{A_1(M) A_2(M)}{2} \left[\underbrace{\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M) - \phi_1(t) - \phi_2(t)) \rangle_\tau}_{=0} + \underbrace{\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M) - \phi_1(t) + \phi_2(t)) \rangle_\tau}_{=\mathcal{I}} \right] \end{aligned}$$

Comme précédemment : $\mathcal{I} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M) + \phi_2(t) - \phi_1(t)) \rangle & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$ Or la fonction $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ varie aléatoirement sur $[-\pi, \pi]$ tous les $\tau_c \approx 10^{-11}$ s tandis que $\tau \gg \tau_c$ donc $\mathcal{I} = 0$ sauf si $\phi_1(t) = \phi_2(t)$, **c'est-à-dire lorsque deux trains d'onde identiques interfèrent.** \square

1.3.3 Modalité (1) : nécessité d'un diviseur d'ondes

Nous avons mis en évidence (partie 1.3.2) que seuls deux trains d'ondes identiques pouvaient donner naissance à des interférences. Ainsi, deux sources de lumière S_1 et S_2 ne pourront produire des interférences en un point M que si (condition nécessaire mais pas suffisante) elles sont obtenues à partir d'une unique "source-mère" S . Le dispositif qui permet de créer ces deux sources **secondaires** est nommé **diviseur d'ondes ou interféromètre**. L'usage distingue la division d'ondes par **division du front d'onde** de celle par **division d'amplitude**.

• Dispositif interférentiel à division du front d'onde

Un dispositif interférentiel est configuré en **division du front d'onde** pour le point M, lorsque les rayons lumineux qui interfèrent en M sont issus de deux rayons différents émis par la source S (cf. figure 2).

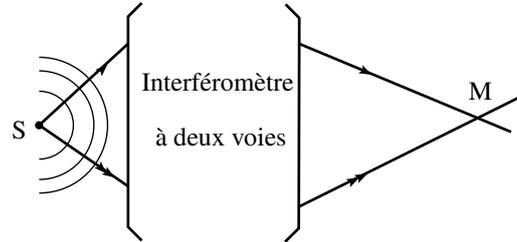


FIGURE 2 – Interféromètre fonctionnant en division du front d'onde

• Dispositif interférentiel à division d'amplitude

Un dispositif interférentiel est configuré en **division d'amplitude** pour le point M, lorsque les rayons lumineux qui interfèrent en M sont issus d'un même rayon émis par la source S (cf. figure 3). En pratique, il existe une lame semi-réfléchissante appelée **lame séparatrice** qui divise énergétiquement le faisceau incident en un faisceau *transmis* (issu de S) et un faisceau *réfléchi* (lui aussi issu de S mais qui semble provenir de S').

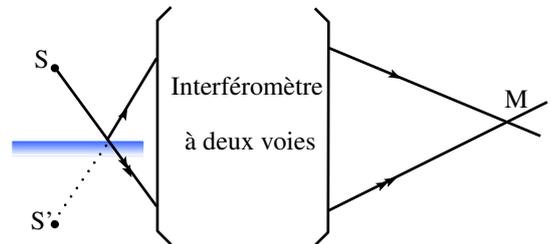


FIGURE 3 – Interféromètre fonctionnant en division d'amplitude

1.3.4 Modalité (2) : contrainte sur la différence de marche

Deux trains d'ondes fils être au même point M simultanément si

$$|(SM)_2 - (SM)_1| < \ell_c$$

où $(SM)_i$ désigne le chemin optique de l'onde ayant emprunté la voie i de l'interféromètre.

Le train d'ondes émis par la source primaire S est dédoublé (par division du front d'onde ou division d'amplitude) par l'interféromètre. Chaque train d'ondes fils emprunte alors une voie différente. S'ils ne se superposent pas, on n'observera pas au point M d'interférences (voir figure 5). En revanche, dans le cas de la figure 4, les trains d'ondes se superposent : on observe des interférences au point M. Cela suppose que le temps t_i mis par le train d'ondes pour aller de S à M par la voie i soit tel que $|t_2 - t_1| < \tau_c$ où τ_c désigne le temps de cohérence c'est-à-dire la durée du train d'ondes.

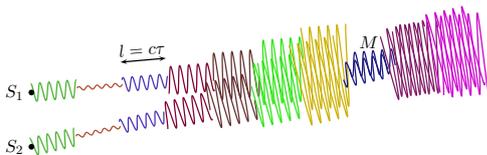


FIGURE 4 – Les trains d'ondes se superposent

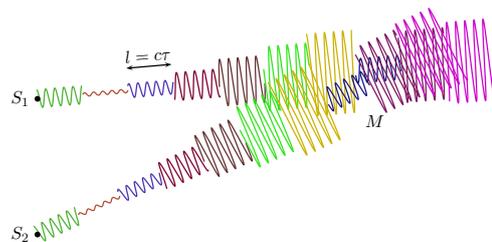


FIGURE 5 – Les trains d'ondes ne se superposent pas

Comme $(SM)_i = ct_i$, il vient $(SM)_2 - (SM)_1 = c(t_2 - t_1)$. Ainsi deux trains d'ondes fils se trouvent en M si $|t_2 - t_1| < \tau_c$ c'est-à-dire si $|(SM)_2 - (SM)_1| < \ell_c$.

1.4 Synthèse et formule des interférences à deux ondes

1.4.1 Synthèse et différence de marche

SYNTHÈSE SUR COHÉRENCE ET INTERFÉRENCES

• **Ondes cohérentes**

On dit que deux ondes quasi-monochromatiques sont **cohérentes lorsqu'elles peuvent interférer**. Les conditions sont les suivantes :

- les ondes sont synchrones ($\omega_1 = \omega_2$);
- les deux trains d'ondes fils se superposent au point M ($|(SM)_2 - (SM)_1| < \ell_c$).

Dans ces conditions, l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M est donné par **la formule des interférences à deux ondes**^a :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M) \cdot \mathcal{E}_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \quad (1)$$

que l'on peut aussi écrire ainsi :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M) \cdot \mathcal{E}_2(M)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \underbrace{(\pm\pi)}_{\text{si déphasage exceptionnel}}\right) \quad (2)$$

où l'on définit la différence de marche : $\delta(M) \triangleq (SM)_2 - (SM)_1$

• **Ondes incohérentes**

Lorsque les conditions de cohérence des ondes ne sont pas respectées, les ondes sont dites **incohérentes et ne peuvent pas interférer**. Les éclaircements s'ajoutent :

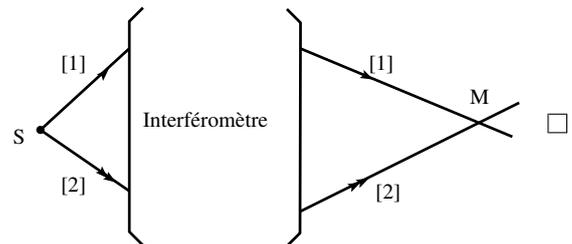
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$$

a. appelée aussi «formule de Fresnel».

Démonstration. Montrons que les équations (1) = (2)

On a la différence de phase entre les deux chemin optique :

$$\begin{aligned} \varphi_2(M) - \varphi_1(M) &= \left[\varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_2 \right] - \left[\varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_1 \right] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SM)_2 - (SM)_1] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \end{aligned}$$



1.4.2 Notion de différence de marche optique

En présence du déphasage **exceptionnel** de π , on a $\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \pm \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[\delta(M) \pm \frac{\lambda_0}{2} \right]$ de sorte que :

Définition : Pour simplifier l'écriture tout en tenant compte des déphasages **exceptionnels**, on peut introduire la **différence de marche optique** notée $\delta_{opt}(M)$ et définie ainsi :

- en l'absence de déphasage exceptionnel $\delta_{opt}(M) \triangleq \delta(M)$;
- en présence de déphasage exceptionnel $\delta_{opt}(M) \triangleq \delta(M) \pm \frac{\lambda_0}{2}$;

La **formule des interférences à deux ondes** s'écrit alors simplement :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M) \cdot \mathcal{E}_2(M)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{opt}(M)\right)$$

1.4.3 Utilisation de la notation complexe pour les ondes cohérentes

L'utilisation de la notation complexe pour deux sources secondaires cohérentes permet de retrouver rapidement la formule des interférences à deux ondes.

À partir de l'onde lumineuse, on définit la grandeur complexe correspondante :

$$s_i(M, t) = A_i(M) \cos(\omega t - \varphi_i(M)) \longleftrightarrow \underline{s}_i(M, t) = \underbrace{A_i(M)}_{=A_i(M)} e^{-i\varphi(M)} e^{i\omega t}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \frac{K}{2} \underline{s} \underline{s}^* \quad \text{où } \underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) \\ &= \frac{K}{2} \underbrace{(\underline{s}_1 \underline{s}_1^*)}_{=\mathcal{E}_1(M)} + \frac{K}{2} \underbrace{(\underline{s}_2 \underline{s}_2^*)}_{=\mathcal{E}_2(M)} + \frac{K}{2} \underbrace{(\underline{s}_1 \underline{s}_2^* + \underline{s}_2 \underline{s}_1^*)}_{=2\Re e(\underline{s}_1 \underline{s}_2^*)} \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + K \Re e \left(A_1(M) A_2(M) e^{-i\varphi_1(M)} e^{-i\varphi_2(M)} e^{i\omega t} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + \frac{K A_1(M) A_2(M)}{2\sqrt{\frac{K}{2} A_1^2(M)} \sqrt{\frac{K}{2} A_2^2(M)}} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \end{aligned}$$

1.5 Vocabulaire

1.5.1 Hypothèses d'étude

• On considère deux sources secondaires cohérentes S_1 et S_2 placées dans un milieu homogène d'indice n . On note λ_0 la longueur d'onde dans le vide de l'onde émise. On est donc dans les conditions d'utilisation de la formule des interférences à deux ondes :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M) \cdot \mathcal{E}_2(M)} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

• **Les variations de $\mathcal{E}_1(M)$ et $\mathcal{E}_2(M)$ sont négligeables à l'échelle du détecteur. On notera donc $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2(M) = \mathcal{E}_2$.** Ainsi :

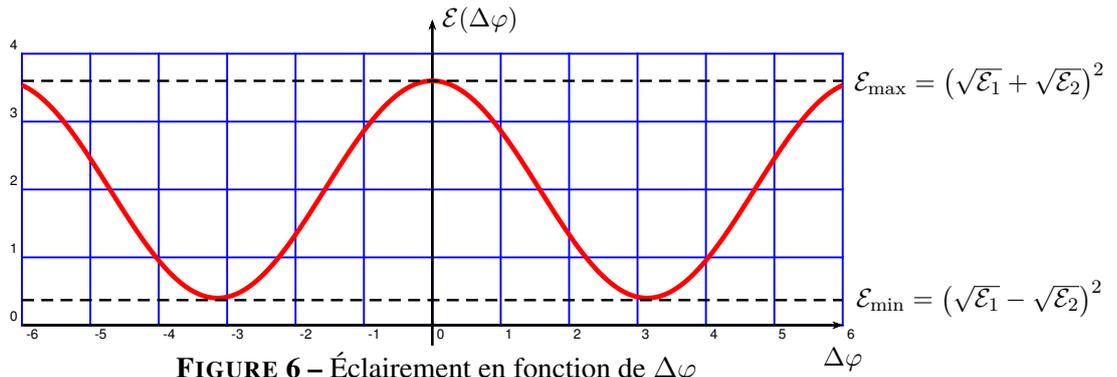
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi(M)) \quad \text{où} \quad \Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$

1.5.2 Tracé de la fonction $\mathcal{E}(\Delta\varphi)$

La fonction $\mathcal{E}(\Delta\varphi)$ est 2π -périodique. Elle présente :

- des maximums locaux lorsque $\Delta\varphi \equiv 0 [2\pi]$ et prend alors la valeur $\mathcal{E}_{\max} = (\sqrt{\mathcal{E}_1} + \sqrt{\mathcal{E}_2})^2$;
- des minimums locaux lorsque $\Delta\varphi \equiv \pi [2\pi]$ et prend alors la valeur $\mathcal{E}_{\min} = (\sqrt{\mathcal{E}_1} - \sqrt{\mathcal{E}_2})^2$.

L'allure de la fonction $\mathcal{E}(\Delta\varphi)$ est donnée sur la figure 6.


 FIGURE 6 – Éclairement en fonction de $\Delta\varphi$

Définition : On nomme **frange d'interférences**, une ligne d'égal éclairement : $\mathcal{E}(M) = cste$, quelle que soit la géométrie de la ligne.

On constate une alternance de franges d'**éclairement minimal** dites **franges sombres** et de franges d'**éclairement maximal** dites **franges claires** ;

1.5.3 Ordre d'interférence ; franges sombres et claires

Définition : On appelle **ordre d'interférence** au point M le paramètre $p(M)$ défini par :

$$p(M) \triangleq \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta_{opt}(M)}{\lambda_0}$$

Théorème - Ordres d'interférences pour les franges claires et sombres :

- Les franges **claires** sont le lieu des points M tels que :

$$\Delta\varphi(M) = m2\pi \Leftrightarrow p(M) = m \Leftrightarrow \delta_{opt}(M) = m\lambda_0 \text{ où } m \in \mathbb{Z}$$

- Les franges **sombres** sont le lieu des points M tels que :

$$\Delta\varphi(M) = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow p(M) = m + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta_{opt}(M) = (m + \frac{1}{2})\lambda_0 \text{ où } m \in \mathbb{Z}$$

1.5.4 Contraste

Définition : On appelle **contraste** Γ d'une figure d'interférences, le réel sans dimension compris entre 0 et 1 :

$$\Gamma \triangleq \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}$$

Théorème - Contraste de l'interférences de deux ondes : Lors d'interférences entre deux ondes cohérentes, le contraste devient :

$$\Gamma = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \text{ ce qui implique } \mathcal{E}(\Delta\varphi) = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \left(1 + \underbrace{\frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}}_{\Gamma} \cos(\Delta\varphi) \right)$$

Remarque : À $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = cste$, les interférences sont donc d'autant plus contrastées que Γ est grand.

Démonstration. Lors d'interférences à deux ondes, on a montré que :

$$\mathcal{E}_{max} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} = (\sqrt{\mathcal{E}_1} + \sqrt{\mathcal{E}_2})^2$$

$$\mathcal{E}_{min} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} = (\sqrt{\mathcal{E}_1} - \sqrt{\mathcal{E}_2})^2$$

En remplaçant dans l'expression du contraste Γ , on obtient :

$$\Gamma \triangleq \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}} = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

On obtient donc pour l'éclairement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Delta\varphi) &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi) \\ &= (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \left[1 + \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi) \right] \\ &= (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) [1 + \Gamma \cos(\Delta\varphi)] \end{aligned}$$

□

On peut représenter la courbe $\mathcal{E}(\Delta\varphi)$ pour différentes valeurs du contraste comme illustré sur la figure 13 (pour trois valeurs du contraste $\Gamma = 0, 1$, $\Gamma = 0, 5$ et $\Gamma = 0, 7$). Cela illustre bien que la différence d'éclairement entre les franges sombres et claires est d'autant plus importante que le contraste Γ est grand.

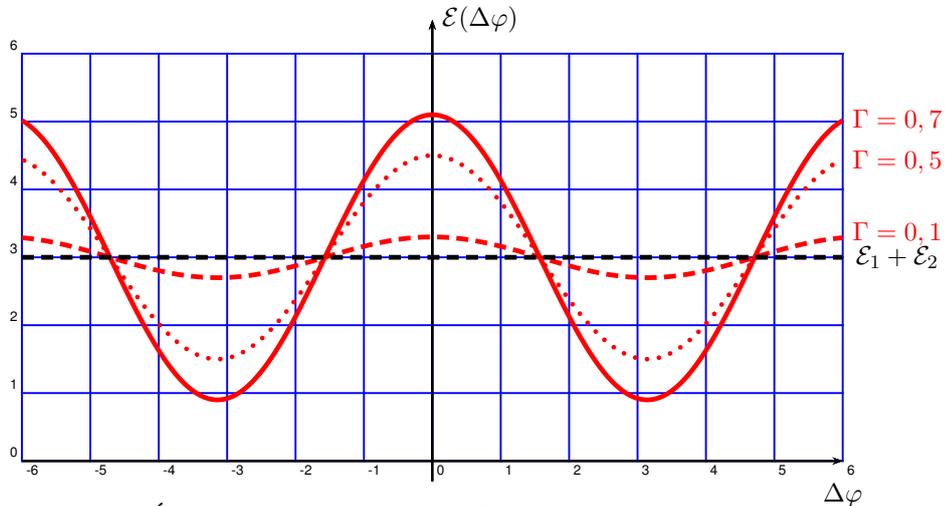


FIGURE 7 – Éclairement en fonction de $\Delta\varphi$ pour trois valeurs du contraste

De nombreux livres concluent hâtivement qu'il faut des éclairements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 similaires pour obtenir des interférences suffisamment contrastées pour être visibles. L'étude de la fonction $\Gamma\left(\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}\right)$ (voir figure 8) révèle que pour un rapport $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{100}$, le contraste est de 0,2 soit 20% ce qui est suffisant pour voir des interférences.

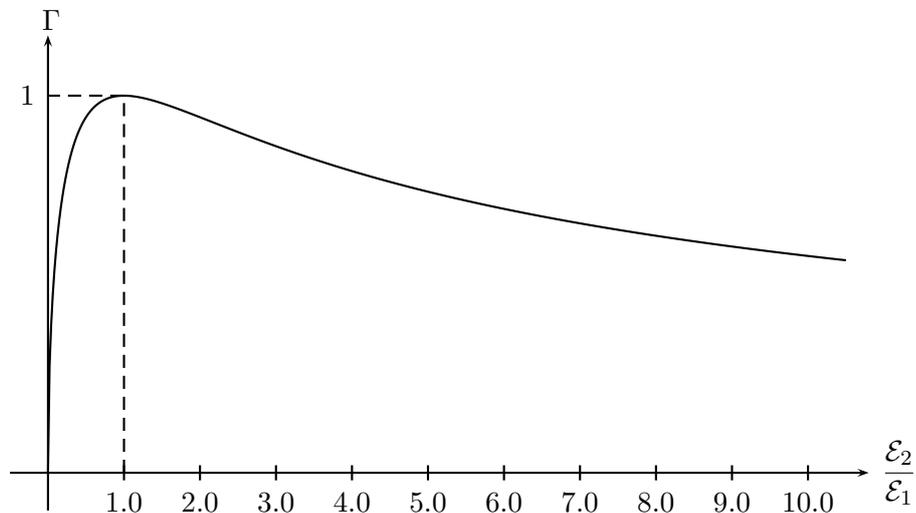


FIGURE 8 – Γ en fonction de $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}$

2 Interférences de deux sources ponctuelles cohérentes à distance finie (ondes sphériques)

2.1 Géométries des franges d'interférences

Théorème - Forme des franges d'interférences :

Lorsque les deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 sont placées dans un milieu homogène d'indice optique n à distance finie l'une de l'autre, les franges d'interférences sont des **hyperboloïdes de révolution** (figure 9). Les interférences sont dites **délocalisées** car on peut les observer dans tout l'espace.

On observe les franges sur un écran :

- si l'écran d'observation est placé orthogonalement à l'axe (S_1S_2) , les franges d'interférences sont des cercles (figure 9)
- si l'écran d'observation est placé parallèlement à l'axe (S_1S_2) , les franges d'interférences sont des branches d'hyperbole localement assimilables à des segments de droite (figures 9 et 10).

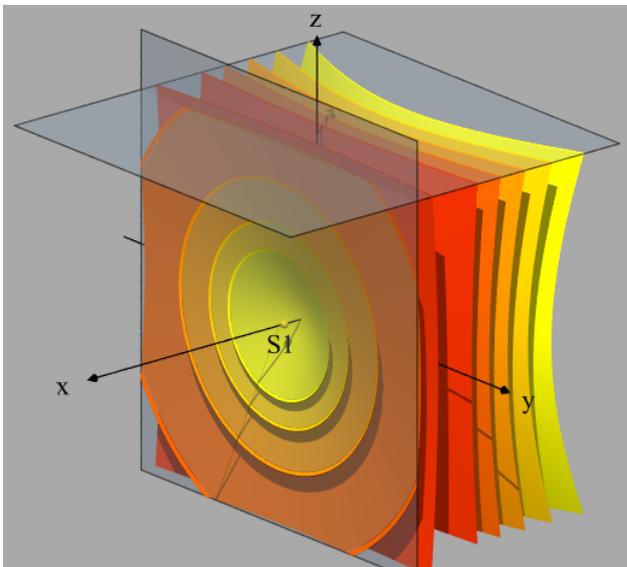


FIGURE 9 – Les franges d'interférence sont des hyperboloïdes de révolution

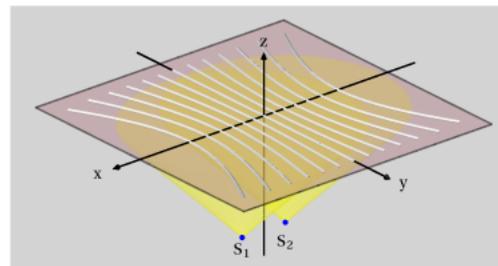


FIGURE 10 – Détail de la figure 9 dans un plan z constant.

Démonstration. Dans le cas de deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 , le lieu des interférences constructives (claires) est le lieu des points M tels que :

$$\begin{aligned} p(M) = \frac{\delta_{opt}}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \frac{(S_2M) - (S_1M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n[S_2M - S_1M] = q\lambda_0 \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

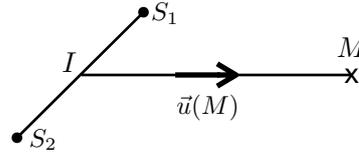
Cette dernière équation correspond à une famille d'hyperboloïdes de révolution. □

2.2 Lemme géométrique

Lemme géométrique : Pour un point M situé loin de S_1 et S_2 (autrement dit $S_1M \gg S_1S_2$ et $S_2M \gg S_1S_2$) et en notant I le milieu de $[S_1S_2]$, il vient :

$$S_2M - S_1M = \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u}(M)$$

où $\vec{u}(M) \triangleq \frac{\overrightarrow{IM}}{IM}$



Démonstration.

$$S_2M^2 - S_1M^2 = S_2\vec{M}^2 - S_1\vec{M}^2 = \underbrace{(S_2\vec{M} + S_1\vec{M})}_{2I\vec{M}} \cdot \underbrace{(S_2\vec{M} - S_1\vec{M})}_{S_2S_1} \quad [1]$$

D'autre part :

$$S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M) \cdot \underbrace{(S_2M + S_1M)}_{\approx 2IM} \quad [2]$$

Comme [1] = [2] on a : $2IM (S_2M - S_1M) = 2I\vec{M} \cdot S_2\vec{S}_1$, donc :

$$S_2M - S_1M = S_2\vec{S}_1 \cdot \vec{u} \quad \text{avec } \vec{u} = \frac{I\vec{M}}{IM}$$

□

2.3 Étude du cas où les franges d'interférences sont des branches d'hyperbole assimilées à des franges rectilignes

Théorème - Franges d'interférences rectilignes : Lorsque l'écran est placé parallèlement à (S_1S_2) , les franges d'interférences sont des branches d'hyperbole (cf figure 10). D désigne la distance de l'écran aux sources secondaires, lorsque $D \gg a$, la différence de marche s'écrit :

$$(S_2M) - (S_1M) = n \frac{ay}{D}$$

Les franges, au voisinage de O, sont donc assimilables à des segments de droite parallèles à l'axe x : on parle de **franges rectilignes** (cf. figure 12).

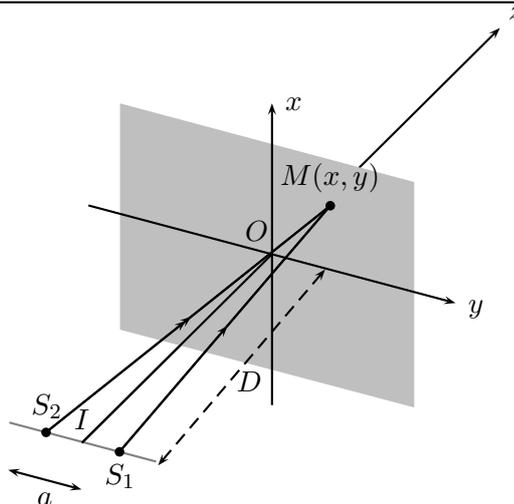


FIGURE 11 – L'écran est parallèle à (S_1S_2) : approximation des franges rectilignes

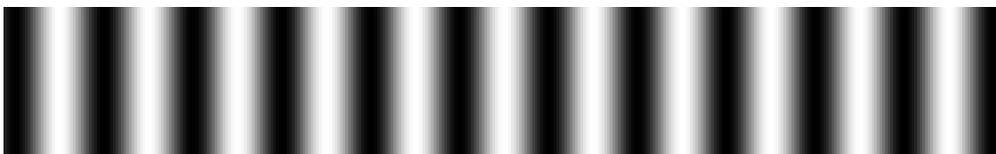


FIGURE 12 – Allure de la figure d'interférences au voisinage de O

Définition : On peut, dans cette configuration, définir l'**interfrange** i comme la distance entre les franges de même éclairement puisque cette grandeur est constante. On calcule :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{a}$$

Démonstration. • **différence de marche :**

d'après le lemme de la partie 2.2 :

$$S_2M - S_1M = S_2\vec{S}_1 \cdot \vec{u}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y = \frac{y}{IM} \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{ay}{IM} \approx \frac{ay}{D}$$

d'où $(S_2M) - (S_1M) = n \frac{ay}{D}$

• **forme des franges :**

Les franges claires sont le lieu des points M tels que :

$$\begin{aligned} p(M) = \frac{\delta_{opt}(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \frac{nay_m}{\lambda_0 D} = m \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow y_m = m \frac{D\lambda_0}{na} \quad \text{où } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Les franges claires sont des segments de droites orthogonales à la direction S_1S_2 .

• **interfrange :** l'interfrange i est telle que :

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{D\lambda_0}{na} = \frac{D\lambda}{a}$$

□

2.4 Étude du cas où les franges d'interférences sont circulaires

Théorème - Franges d'interférences circulaires : Lorsque l'écran est placé perpendiculairement à (S_1S_2) , les franges d'interférences sont des cercles concentriques. Lorsque $D = OI \gg a = S_1S_2$ (cf. figure 13), la différence de marche s'écrit :

$$(S_2M) - (S_1M) = na \underbrace{\cos i}_{i \text{ petit}} = na \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{D^2} \right)$$

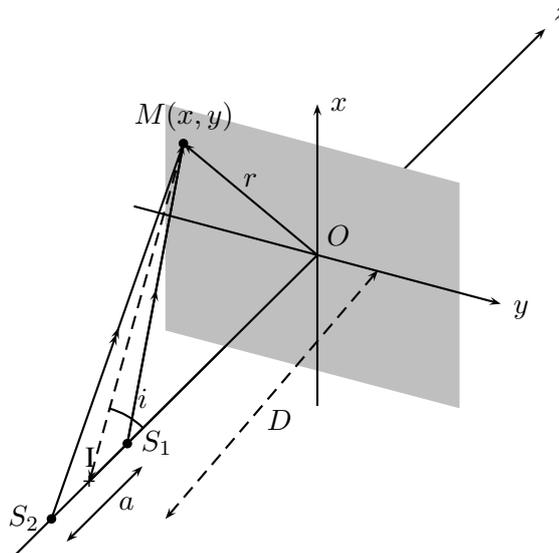


FIGURE 13 – L'écran est orthogonal à (S_1S_2) : franges circulaires

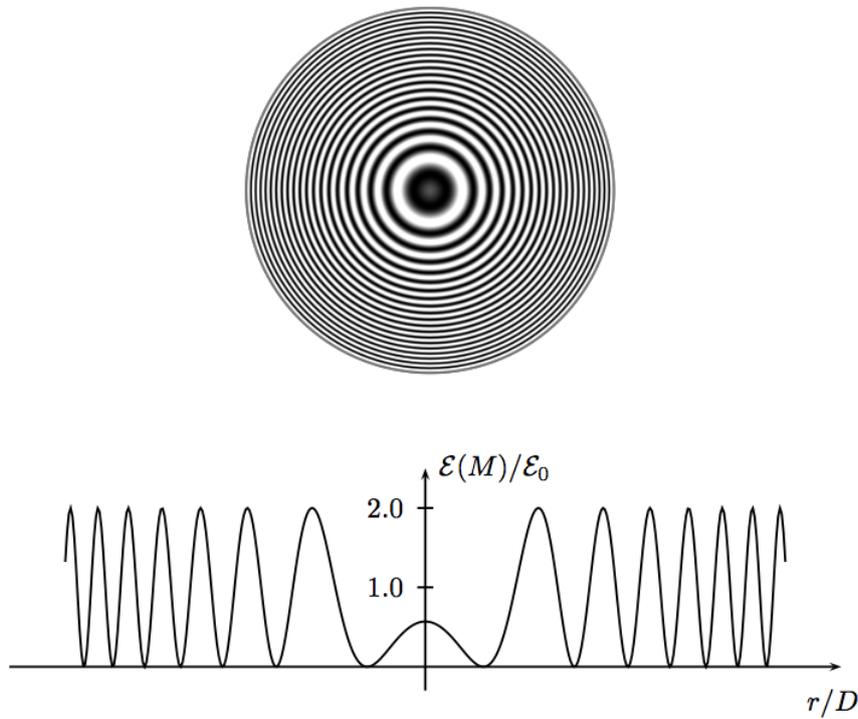


FIGURE 14 – Allure de la figure d'interférences

Dans cette configuration, les franges de même éclairement ne sont pas équidistantes : **on ne peut pas définir d'interfrange** (cf. figure 14). Les anneaux sont de plus en plus resserrés à mesure que l'on s'éloigne du centre de la figure.

Démonstration. • **différence de marche :**

d'après le lemme de la partie 2.2 :

$$S_2M - S_1M = S_2\vec{S}_1 \cdot \vec{u}(M) = a\vec{e}_z \cdot \vec{u} = a \cos i$$

d'où $(S_2M) - (S_1M) = n [S_2M - S_1M] = na \cos i$

D'après la figure 13, on obtient :

$$\cos i = \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{D^2}}} \approx 1 - \frac{r^2}{2D^2} \quad \text{avec } r \ll D \text{ car } i \text{ petit}$$

Ainsi on obtient : $(S_2M) - (S_1M) = na \left(1 - \frac{r^2}{2D^2}\right)$

• **forme des franges :**

Les franges claires sont le lieu des points M tels que :

$$\begin{aligned} p(M) = \frac{\delta_{opt}(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} &\Rightarrow na \left(1 - \frac{r_m^2}{2D^2}\right) = m\lambda_0 \\ &\Rightarrow r_m = D \sqrt{2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{na}\right)} \quad \text{où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 - m \frac{\lambda_0}{na} > 0 \end{aligned}$$

C'est une famille de cercle concentriques de rayon r_m . L'ordre croît à mesure que le rayon diminue.

• **interfrange :** on constate que $r_m - r_{m+1}$ n'est pas constant : on ne peut pas définir l'interfrange (certains auteurs disent que l'interfrange n'est pas constant)

□

3 Interférences de deux sources ponctuelles cohérentes situées à l'infini (ondes planes)

3.1 Réalisation expérimentale et modélisation

On étudie le cas où les sources secondaires S_1 et S_2 sont à l'infini. Chaque source S_i crée une onde lumineuse assimilable à une onde plane d'amplitude :

$$s_i(M, t) = A_{0i} \cos \left(\omega t - \underbrace{\varphi_i(O) - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}}_{-\varphi_i(M)} \right)$$

où O est un point de référence. On tient cependant compte de la largeur finie des faisceaux : le champ d'interférences est représenté sur la figure 15.

La propagation des faisceaux ayant lieu dans un milieu homogène d'indice optique n , on a :

$$\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

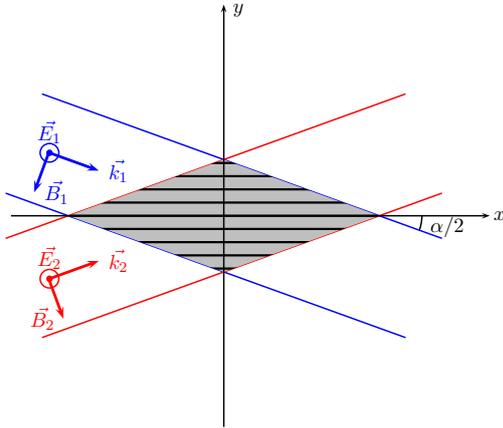


FIGURE 15 – Géométrie du problème

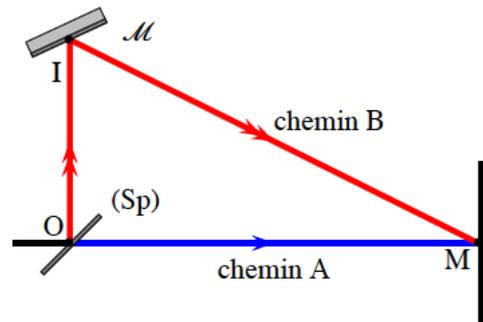


FIGURE 16 – Un dispositif expérimental

La figure 16 représente un dispositif expérimental permettant de réaliser de telles interférences. Un faisceau laser est divisé par une lame semi-réfléchissante (**division d'amplitude**). L'un des deux faisceaux fils est transmis (chemin A) tandis que l'autre est réfléchi par la lame puis réfléchi par un miroir plan (chemin B) afin de pouvoir être superposé au premier faisceau dans le champ d'interférences situé au voisinage du point M.

3.2 Figure d'interférences

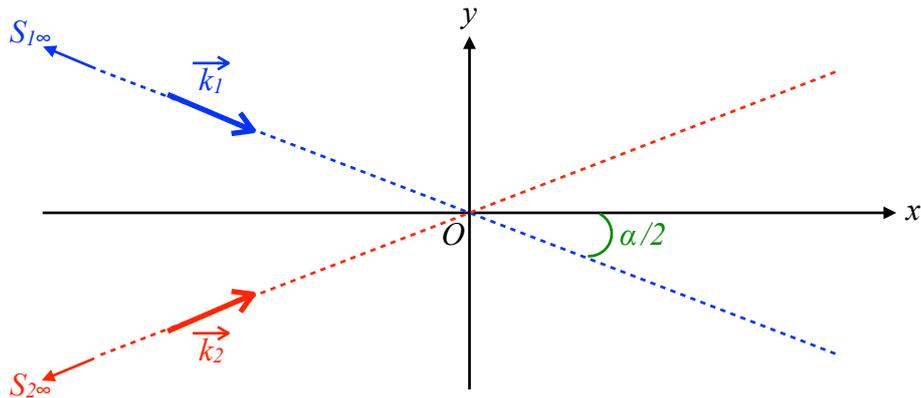
Théorème - Forme des franges d'interférences : Les franges d'interférences de deux faisceaux issus de sources synchrones à l'infini (de longueur d'onde dans le vide λ_0) se propageant dans un milieu homogène d'indice optique n , sont des plans parallèles au plan médiateur des sources (cf. figure 15).

Les franges de même nature sont équidistantes : on peut définir l'interfrange i . On détermine :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\lambda_0}{2n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

où α désigne l'angle entre les deux faisceaux.

Démonstration. La situation peut être représenté comme sur le schéma suivant :



• **différence de phase :**

La différence de phase en M où se coupent les rayons provenant des sources $S_{1\infty}$ et $S_{2\infty}$ est :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(M) &= \varphi_2(M) - \varphi_1(M) \\ &= [\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} + \varphi_2(O)] - [\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} + \varphi_1(O)] \\ &= (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} + \varphi_2(O) - \varphi_1(O)\end{aligned}$$

avec les vecteurs d'onde suivant :

$$\begin{cases} \vec{k}_1 = k \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{u}_x - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{u}_y \right] \\ \vec{k}_2 = \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{u}_x + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{u}_y \right] \end{cases} \quad \text{avec } k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Ainsi on obtient pour la différence de phase en M :

$$\Delta\varphi(M) = 2k \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{OM}}_y + \varphi_2(O) - \varphi_1(O)$$

• **forme des franges :** Les franges claires sont le lieu des points M tels que :

$$p(M) = \frac{\delta_{\Delta\varphi}}{2\pi} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{4\pi}{\lambda_0} ny + \varphi_2(O) - \varphi_1(O) = 2\pi m \quad \text{où } m \in \mathbb{Z}$$

C'est une famille de droites parallèles à l'axe x

• **interfrange :** En soustrayant les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{4\pi}{\lambda_0} ny_{m+1} + \varphi_2(O) - \varphi_1(O) = 2\pi(m+1) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{4\pi}{\lambda_0} ny_m + \varphi_2(O) - \varphi_1(O) = 2\pi m \end{cases}$$

on obtient :

$$n \frac{4\pi}{\lambda_0} (y_{m+1} - y_m) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda_0}{2n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

□

4 Schéma de principe de quelques dispositifs interférentiels fonctionnant par division du front d'onde

4.1 Miroirs de Fresnel

Ce dispositif (cf. figure 17) est constitué de deux miroirs plans faisant un angle α entre eux (pour des raisons de lisibilité, l'angle a été exagéré : il est en fait de l'ordre de 10^{-2} rad). Les deux faisceaux réfléchis sur les miroirs (M_1) et (M_2) sont initialement issus de S donc cohérents. Ces faisceaux semblent provenir de S_1 et S_2 , images de S par les miroirs (M_1) et (M_2). Elles jouent le rôle de sources secondaires et permettent de calculer facilement la différence de marche entre deux rayons.

Raisonnons dans le plan contenant la source S et les normales aux miroirs, et appelons A le point commun aux miroirs dans ce plan. Comme $AS = AS_1$ et $AS = AS_2$, les trois points S , S_1 et S_2 sont sur un même cercle de centre A . Soit θ l'angle entre la droite (AS) et le miroir (M_1) (plus rigoureusement l'angle entre (AS) et le segment intersection du miroir plan (M_1) avec le plan de la figure), alors $\widehat{SAS_1} = 2\theta$. De même, puisque l'angle entre (AS) et (M_2) est $\theta + \alpha$, alors $\widehat{SAS_2} = 2(\theta + \alpha)$. Par différence, $\widehat{S_1AS_2} = 2\alpha$. Ce résultat permet de déterminer la distance entre les deux sources secondaires. On est alors dans le cas de l'étude menée au paragraphe 2.3 : **l'écran étant placé parallèlement à l'arête des miroirs et aux points S_1 et S_2 , on observe des franges rectilignes parallèles à l'arête des miroirs.** Notez que le champ d'interférences (grisé) est restreint.

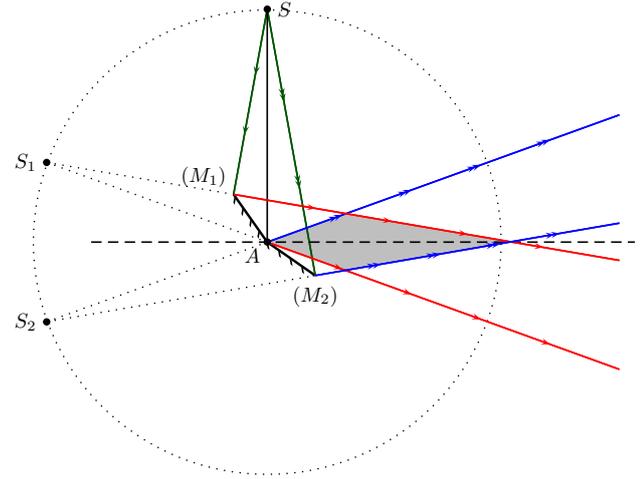


FIGURE 17 – Miroirs de Fresnel

4.2 Dispositif des trous de Young

4.2.1 Présentation

Le dispositif des trous de Young est représenté sur la figure 18. Il est constitué de deux trous S_1 et S_2 percés dans un écran opaque et éclairés par une source lumineuse S supposée monochromatique (longueur d'onde dans le vide λ_0). Nous supposons, dans un premier temps, que la source primaire est ponctuelle et située sur la médiatrice des deux trous, orthogonale à l'écran. Ce dispositif fait intervenir le phénomène de diffraction de la lumière par une ouverture de petite dimension. L'étude détaillée de ce phénomène sera exposée ultérieurement. Nous nous contenterons d'admettre pour le moment que les trous S_1 et S_2 s'ils sont «très petits» et éclairés par une source lumineuse S , se comportent comme des sources ponctuelles secondaires.

Puisque la position de la source primaire S est à égale distance des sources S_1 et S_2 , les deux sources secondaires sont en phase car :

$$\underbrace{nSS_1}_{(SS_1)} = \underbrace{nSS_2}_{(SS_2)}$$

D'autre part, en notant n l'indice de l'air pour la longueur d'onde considérée, a la distance entre les deux sources, D la distance entre l'écran opaque et l'écran d'observation et (x, y) les coordonnées d'un point M sur l'écran, on a montré dans le précédent chapitre (sous les conditions : $D \gg a$, $D \gg x$ et $D \gg y$) que la différence de marche valait :

$$\delta(M) \triangleq (SM)_2 - (SM)_1 = n(S_2M - S_1M) = n \frac{ax}{D}$$

Si l'on suppose les trous identiques alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ notés \mathcal{E}_0 par la suite. La formule des interférences à deux ondes s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n \frac{ax}{D} \right) \right]$$

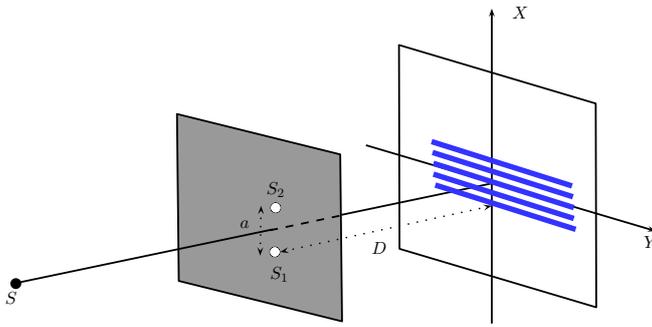


FIGURE 18 – Dispositif des trous de Young (trous «infiniment petits»)

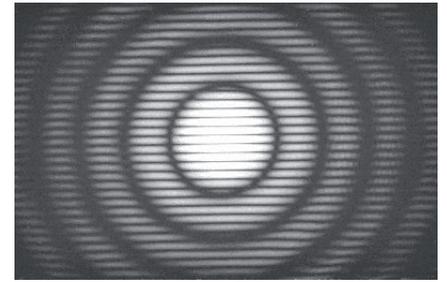


FIGURE 19 – Trous de taille finie

La figure d'interférences observée sur l'écran est donc constituée de franges rectilignes parallèles dont l'interfrange est $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$.

Ordre de grandeur : Pour $D \sim 2$ m, $a \sim 1$ mm et $\lambda_0 \sim 0,5 \mu\text{m}$, il vient $i \sim 1$ mm. En utilisant un viseur, Thomas YOUNG (1773 - 1829) a pu mesurer pour la première fois des longueurs d'onde de radiations lumineuses.

Remarque : Les trous étant de taille finie, le phénomène de diffraction n'est plus isotrope et une photographie de la figure d'interférences obtenue réellement a été placée en figure 19.

4.2.2 Influence du contraste

Supposons que l'on soit capable de faire varier l'éclairement généré par chacune des sources secondaires : il s'en suit que le contraste Γ va être modifié. La figure 20 représente la figure d'interférences pour différentes valeurs du contraste. On a noté $\mathcal{E}_m \triangleq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

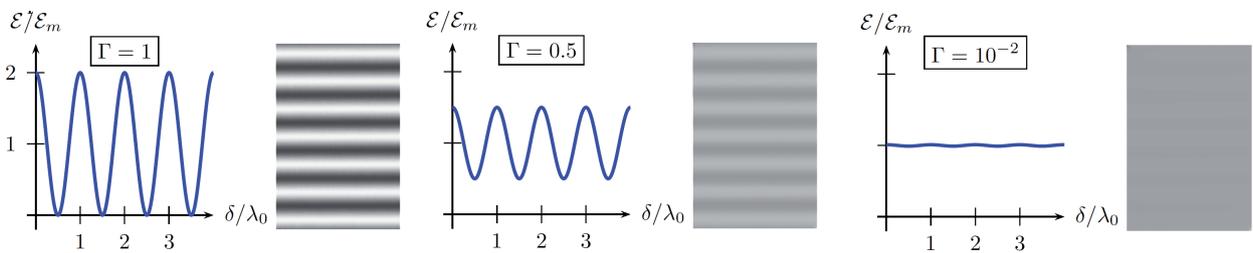


FIGURE 20 – Influence du contraste

L'un des dispositifs les plus simples est l'emploi d'un miroir plan pour créer l'image S_1 d'une source primaire S (voir figure 21) : les deux sources cohérentes responsables du phénomène d'interférence sont ainsi S et S_1 . La source S éclairant dans tout l'espace, le champ d'interférences est alors l'ensemble du faisceau semblant provenir de S_1 (en gris sur la figure). Conformément à l'étude du paragraphe 2.3, l'écran étant placé comme sur la figure 21, on observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du miroir.

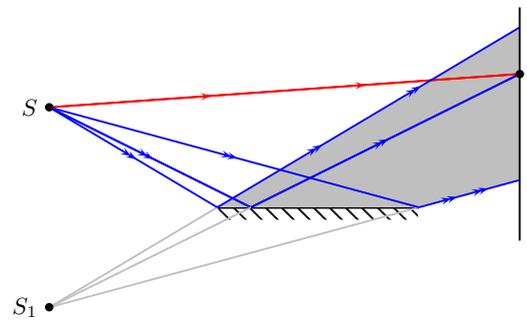


FIGURE 21 – Miroir de Lloyd