

### 3. Fonction Filtrage

Butterworth

Chebyshev

Bessel

La fonction filtrage est une fonction essentielle des systèmes électroniques. On en retrouve dans les systèmes de télécommunications (téléphone, télé-vision, radio), dans les alimentations électriques, mais aussi dans les systèmes d'acquisition et de traitement de signaux.

Il existe deux familles de filtre : les filtres analogiques et les filtres numériques. Ces derniers sont constitués de structures intégrées micro-programmable, comme par exemple des DSP (*Digital Signal Processor*). Ce sont donc essentiellement des fonctions informatiques ou mathématiques, qui nécessitent que le signal soit déjà sous une forme numérique. Ils sont largement utilisés dans les systèmes intégrés mais sont limités en fréquences ( $< 100$  MHz). De plus, comme ils nécessitent un pré-filtrage, une numérisation du signal et parfois un post-filtre de lissage, ils ne seront pas utilisés pour des signaux purement analogiques ou lorsque l'on cherche à limiter la consommation du système.

Les filtres analogiques se divisent eux-mêmes en deux catégories que nous détaillerons par la suite : les filtres passifs et les filtres actifs. Ces filtres bien que plus anciens, permettent une utilisation haute fréquence (pour les filtres passifs) et sont plus simples à concevoir (pour les filtres actifs).

#### 3.1 Introduction au filtrage de signaux

La fonction filtrage électronique est la mise en œuvre au niveau électronique du traitement d'un signal que l'on prendra ici analogique. Dans le schéma du circuit GSM de la figure 3.1.1, les éléments filtrants sont identifiés. On en trouve en entrée du circuit au niveau de la réception de l'antenne, mais aussi avant chaque unité de traitement du signal. Dans la partie d'émission, on en retrouve aussi en amont de l'antenne.

Dans le cas de la norme GSM, les signaux porteurs de l'information ne peuvent utiliser qu'un nombre fini de canaux de fréquences en émission et en réception. Sur la figure 3.1.2 par exemple, la liaison montante d'une transmission GSM (émission) comprend 174 canaux sur une plage de fréquence de 880 à 915 MHz et la liaison descendante (réception) admet aussi 174 canaux entre 925 et 960 MHz. Chaque canal a donc une dimension de 200 kHz. Il devient nécessaire de pouvoir sélectionner chaque canal indépendamment au moyen d'un dispositif de filtrage en fréquence.



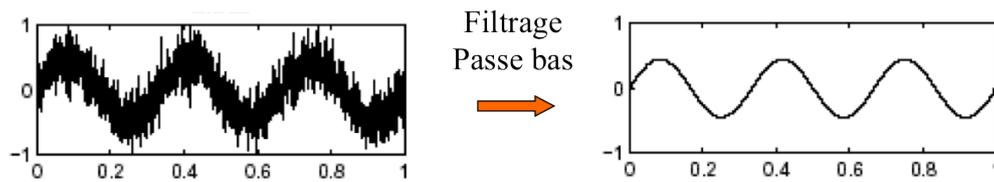


FIGURE 3.1.3 – Un signal basse fréquence, parasité par des composantes hautes fréquences traverse un filtre passe-bas. On recueille en sortie un signal basse fréquence propre.

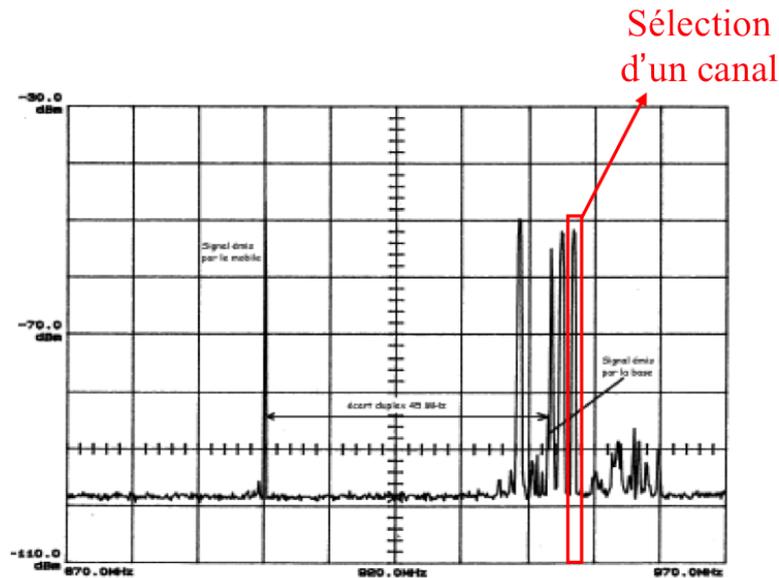


FIGURE 3.1.4 – Un filtre permet, par exemple, de sélectionner une fréquence particulière dans un signal multifréquence (<http://www.ta-formation.com/cours-gsm/p-gsmmobile.pdf>).

de manière indépendante. En utilisant un dispositif de filtrage dans une bande de fréquence de largeur et fréquence centrale donnée, le reste des composantes fréquentielles sera affaibli. Sur la figure 3.1.4, le cadre rouge représente donc l'action du filtre *passe-bande* utilisé.

En résumé, la fonction filtrage sur des signaux analogique permet :

- d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences jugées parasites ou indésirables ;
- d'isoler dans un spectre de signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles ou à étudier.

### 3.1.2 Les différents types de filtre

On distingue quatre types différents de filtre, le reste n'étant que des combinaisons de ces types standards.

#### Le filtre passe-bas

Le filtre passe-bas permet d'affaiblir ou de couper les fréquences hautes d'un signal à partir d'une fréquence définie, dite *fréquence de coupure* que l'on notera  $f_c$ . Cette fréquence est définie comme la fréquence à partir de laquelle la puissance du signal est divisée par deux, c'est-à-dire présente une atténuation en gain de 3 dB.

### Le filtre passe-haut

Le filtre passe-haut fait l'inverse du filtre passe-bas. Cette fois-ci, on cherche à laisser passer les hautes fréquences à partir de la fréquence  $f_c$ . Cette fréquence est encore définie comme la fréquence pour laquelle le gain en amplitude est de -3 dB.

### Le filtre passe-bande

Le filtre passe-bande permet la sélection d'une bande de fréquence et donc l'isolement de ces fréquences. Il s'agit donc de l'addition d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut dont les fréquences de coupure définissent une bande de fréquences pour laquelle le gain en amplitude du signal sera supérieur à -3 dB. On définira donc une *fréquence centrale*  $f_0$  pour laquelle le gain du signal est de 1 et deux fréquences de coupures  $f_1$  et  $f_2$  à -3 dB. Ainsi, dans la bande  $[f_1, f_2]$ , le signal n'est pas atténué.

### Le filtre coupe-bande

Le filtre coupe-bande fait l'inverse du filtre passe-bande. Au lieu d'atténuer les fréquences en-dehors de la bande  $[f_1, f_2]$  centrée en  $f_0$ , il s'agit maintenant de n'atténuer le signal que dans cette bande.

La figure 3.1.5 illustre les quatre différents types de filtre.

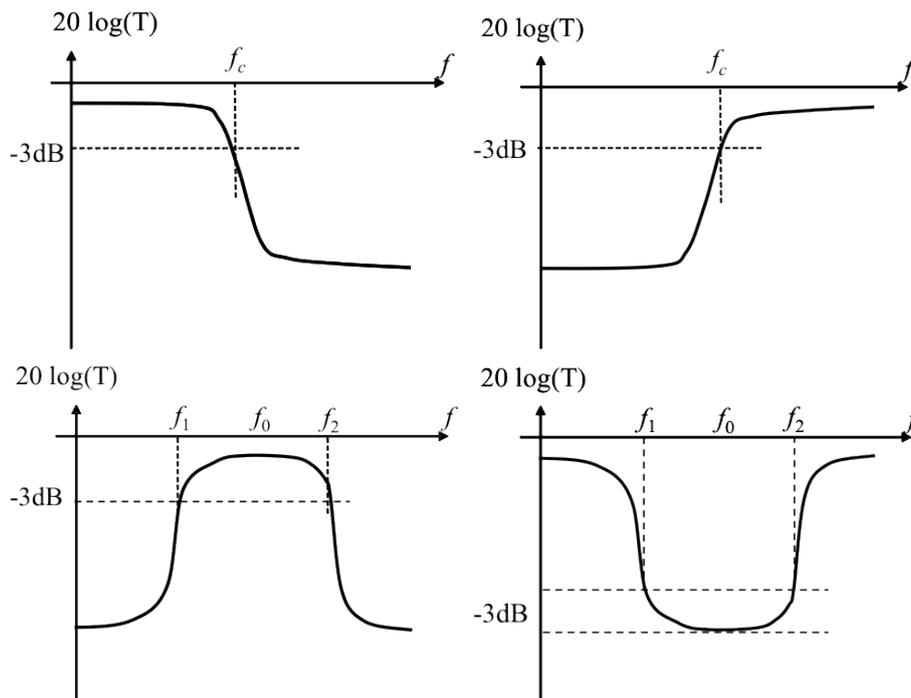
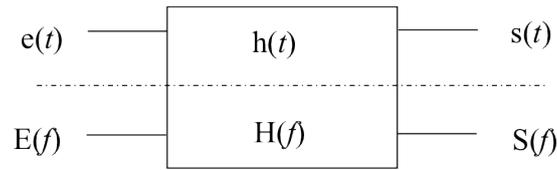


FIGURE 3.1.5 – Dans l'ordre : le filtre passe-bas qui coupe les fréquences au-dessus de  $f_c$ , le filtre passe-haut qui coupe en-dessous de  $f_c$ , le filtre passe-bande qui coupe en dehors de la bande  $[f_1, f_2]$  centrée en  $f_0$  et le filtre coupe-bande qui coupe la bande  $[f_1, f_2]$  centrée en  $f_0$ .

### 3.1.3 Caractéristiques d'un filtre

Un filtre est un système linéaire. Son comportement est défini par l'étude fréquentielle de sa fonction de transfert.



**FIGURE 3.1.6** – Représentation d'un système linéaire caractérisé par une fonction de transfert  $h$  (ou  $H$ ) entre une entrée  $e$  (ou  $E$ ) et une sortie  $s$  (ou  $S$ ).

### Fonction de transfert

Dans le domaine temporel la sortie  $s(t)$  d'un système linéaire correspond à la convolution du signal d'entrée  $e(t)$  et de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système. Du fait des propriétés de la transformée de Fourier, cette relation entre l'entrée  $E(f)$  et la sortie  $S(f)$  se simplifie dans le domaine fréquentiel, et devient un simple produit :

$$S(j2\pi f) = H(j2\pi f) \times E(j2\pi f), \quad (3.1.1)$$

où  $H(f)$  est appelée fonction de transfert du système.

On peut aussi utiliser la transformée de Laplace :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(p)e^{pt} dp, \text{ avec } E(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e^{-pt} dt. \quad (3.1.2)$$

L'équation (3.1.1) s'écrit alors :

$$S(p) = H(p) \times E(p). \quad (3.1.3)$$

La fonction de transfert  $H(p)$  peut toujours être approximée par un rapport de deux polynômes, de coefficients  $a_i$  et  $b_i$  :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^k b_i p^i}{\sum_{j=0}^m a_j p^j} = \frac{\prod_{i=1}^k (p - z_i)}{\prod_{j=1}^m (p - p_j)}, \quad (3.1.4)$$

avec  $k < m$ . Les racines du polynôme numérateur sont les **zéros** de la fonction de transfert, et les racines du polynôme dénominateur sont les **pôles** de la fonction de transfert.

On rappelle que le gain et la phase sont directement liés à la fonction de transfert par les équations suivantes :

$$\begin{cases} G_{dB} &= 20 \times \log_{10}|H(j\omega)| \\ \varphi &= \arg[H(j\omega)] \end{cases} \quad (3.1.5)$$

### Stabilité d'un filtre

Reprenons l'équation (3.1.4) de la fonction de transfert dans l'espace de Laplace. Il est toujours possible de développer  $H(p)$  en une somme de fractions simples dont le dénominateur ne contient qu'un pôle réel ou deux pôles complexes conjugués :

$$H(p) = \sum_i \frac{R_i}{p - p_i} + \sum_j \frac{A_j p + B_j}{p^2 + 2\alpha_j p + \omega_j^2}, \quad (3.1.6)$$

où les  $p_i$  correspondent aux racines réelles, et les  $\alpha_i \pm j\beta_i$  aux racines complexes conjuguées. En considérant les transformées de Laplace inverses de ces deux types de fractions simples :

$$TL^{-1} \left( \sum_i \frac{R_i}{p - p_i} \right) = \sum_i R_i e^{p_i t} \quad (3.1.7)$$

$$TL^{-1} \left( \sum_j \frac{A_j p + B_j}{p^2 + 2\alpha_j p + \omega_j^2} \right) = \sum_j e^{\alpha_j t} \left( A_j \cos \beta_j t + \frac{B_j - A_j}{\beta_j} \sin \beta_j t \right) \quad (3.1.8)$$

on constate que les évolutions temporelles obtenues divergent si le système possède un pôle à partie réelle positive. Ainsi, un système linéaire ne sera stable que s'il ne possède pas de pôles à partie réelle positive.

### Causalité

Un signal n'est pas déformé par un système linéaire s'il est seulement amplifié et/ou retardé. C'est donc ce que l'on cherchera à faire dans le cas d'un filtre idéal, et qui se traduira par la recherche d'une fonction de transfert dont le module est indépendant de la fréquence et dont la phase est proportionnelle à la fréquence.

Si on considère le cas d'un filtre passe bas idéal, celui-ci devra donc, d'après les critères décrits précédemment, avoir une fonction de transfert donnée par :

$$H(f) = \begin{cases} A e^{-j2\pi f t_0} & \text{si } f < f_c \\ 0 & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (3.1.9)$$

où  $t_0$  est le retard, constant pour toutes les fréquences, subi par le signal lors de son passage au travers du filtre. Cette fonction de transfert idéale est représentée sur la figure 3.1.7. Si maintenant, on effectue la transformée de Fourier inverse de cette fonction de transfert on obtient la réponse impulsionnelle  $h(t)$  donnée par :

$$h(t) = A f_c \frac{\sin(2\pi f_c (t - t_0))}{2\pi f_c (t - t_0)}. \quad (3.1.10)$$

Cette réponse impulsionnelle montre clairement qu'un tel système répond avant même d'avoir été excité (oscillations présente avant  $t = 0$  sur la figure 3.1.8). Ce système n'est donc pas causal, et ne pourra pas être réalisé en pratique. On devra donc chercher des solutions approchées des cas idéaux, mais respectant le principe de causalité.

### 3.1.4 Notion de gabarit

Pour l'étude d'un filtre, il est nécessaire d'en définir les spécifications attendues : c'est ce que l'on appelle le **gabarit**. Celui-ci doit retranscrire tous les éléments permettant de dimensionner le filtre.

#### Le cas idéal

La figure 3.1.9 montre les gabarits d'un filtre passe-bas idéal et d'un filtre passe-bande idéal. Dans le cas idéal, le gain dans la bande passante ou dans la bande atténuée est constant, et la transition entre ces deux bandes est immédiate. Le cas d'un filtre réel présentera une bande transitoire.

#### Le cas réel

Considérons maintenant un filtre passe-bas réel dont le gabarit est défini à partir de la figure 3.1.10. Le gabarit doit donner les informations suivantes :

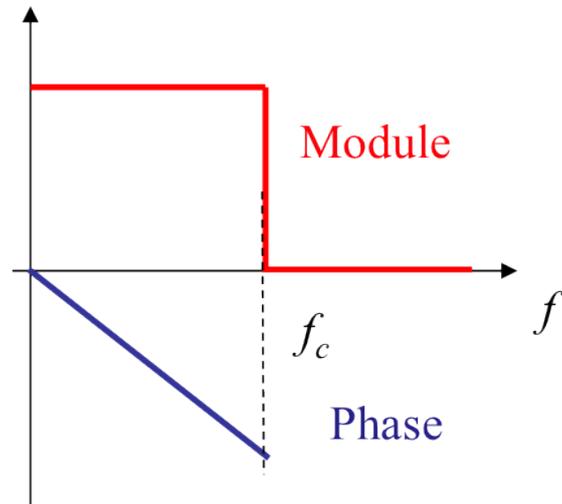
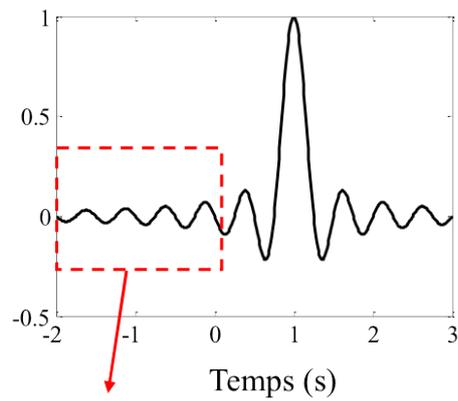


FIGURE 3.1.7 – Module et phase de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal.



**Système non causal**

FIGURE 3.1.8 – Réponse temporelle d'un filtre passe-bas idéal.

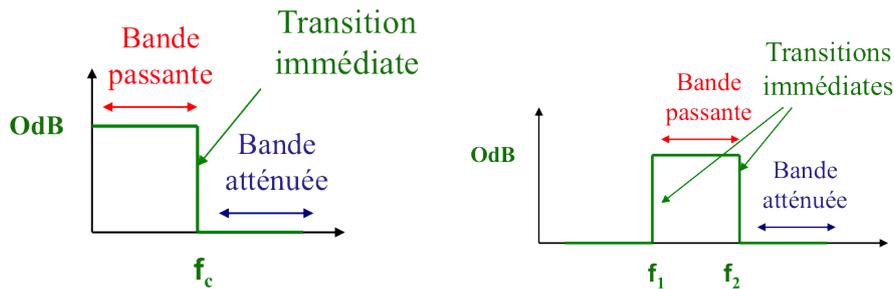


FIGURE 3.1.9 – Gabarit idéal d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-bande. Dans ce cas idéal, le gabarit est confondu avec le filtre. Aucune ondulation n'est permise et la transition entre bande passante et atténuée est immédiate.

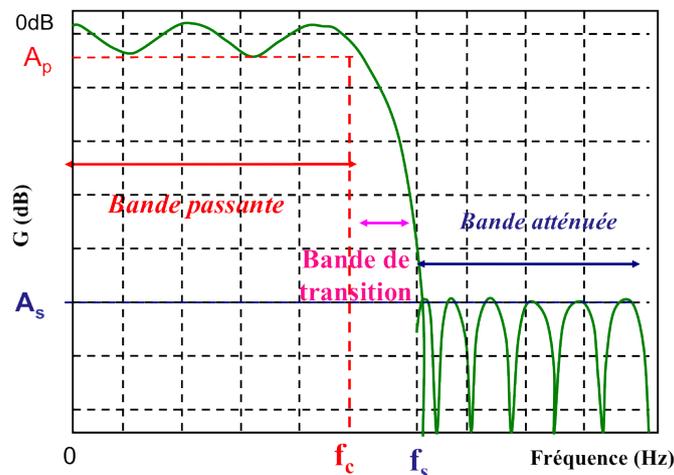


FIGURE 3.1.10 – Gabarit pour un filtre réel. Ici, il est nécessaire de considérer les oscillations possibles du gain dans la bande passante et la bande atténuée, ainsi que la largeur de la bande de transition entre bande passante et atténuée.

- la valeur d'oscillation dans la bande passante  $A_p$ , définie en dB. C'est la tolérance maximale de gain du signal dans la bande passante ;
- la fréquence de coupure  $f_c$  qui définit la fréquence à partir de laquelle le gain du filtre est de -3 dB ;
- l'atténuation  $A_s$  (en dB), valeur d'affaiblissement minimale des composantes fréquentielles du signal que l'on souhaite supprimer. Elle définit donc implicitement le début de la bande atténuée ;
- la fréquence d'atténuation  $f_s$  qui définit la fréquence à partir de laquelle le gain du filtre atteint la valeur d'atténuation (en dB). A partir de cette fréquence, le filtre remplit pleinement son objectif et toute fréquence supérieure est dite "coupée". Elle définit ainsi une bande d'arrêt ;
- la pente de transition  $\Delta G$  en dB/décade. Il s'agit de la pente moyenne avec laquelle la transition entre bande passante et bande atténuée s'opère. Elle dépend de l'ordre du filtre.

Ce gabarit permet donc de prendre en compte les imperfections du filtre réel que sont l'ondulation dans les bandes passante et atténuée, la transition non-immédiate et l'affaiblissement dans la bande d'arrêt. Enfin, il fixe surtout les **limites** de la fonction de transfert du filtre à réaliser.

La figure 3.1.11 reprend pour chaque type de filtre décrit précédemment l'allure de gabarit nécessaire.

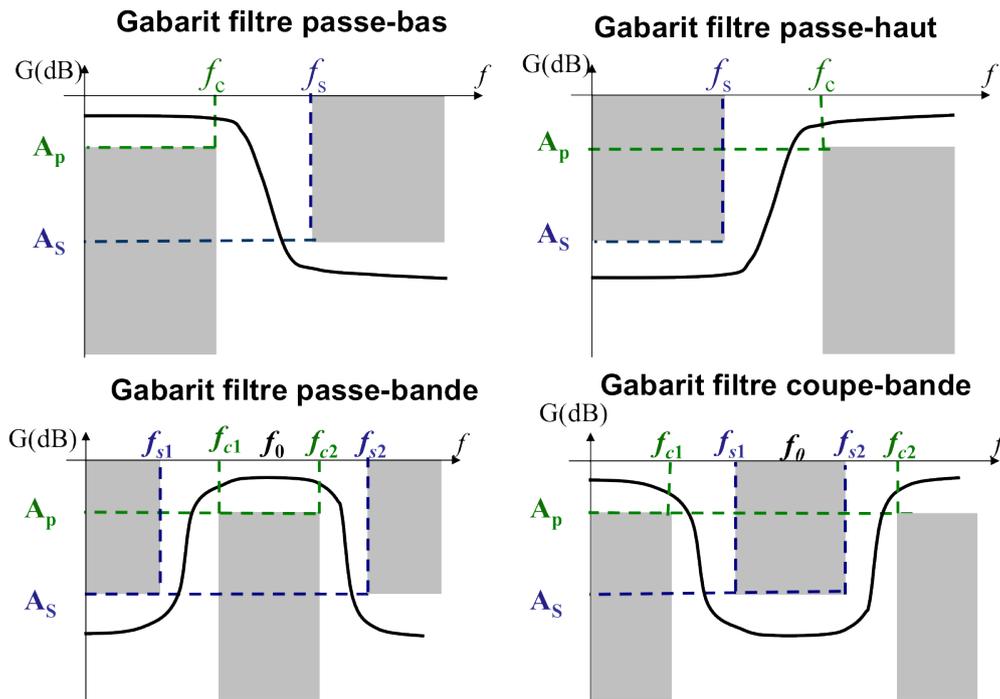


FIGURE 3.1.11 – Allures des gabarits associés aux quatre types de filtre.

### Comportement asymptotique

Reprenons l'expression de la fonction de transfert de l'équation (3.1.4), mais en notation fréquentielle :

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^k b_i(j\omega)^i}{\sum_{j=0}^m a_j(j\omega)^j}. \quad (3.1.11)$$

Dans le cas d'un filtre passe bas ( $a_0$  et  $b_0 \neq 0$ ), lorsque la fréquence tend vers 0, la fonction de transfert tend vers une valeur  $H(0)$  finie. Lorsque la fréquence tend vers l'infinie, la fonction de transfert tend vers une fonction dépendant de  $\omega$  :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} H &= H(0) = \frac{b_0}{a_0} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) &= \frac{b_k}{a_m}(j\omega)^{k-m} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Ainsi, dans l'exemple d'un filtre passe-bas, il devient possible d'évaluer la pente selon laquelle le gain (module de  $H(j\omega)$ ) va chuter en fonction de la fréquence. On va donc calculer :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = \left| \frac{b_k}{a_m} \right| (\omega)^{k-m} \Rightarrow H_{dB} = 20 \times \log_{10} \left| \frac{b_k}{a_m} \right| - 20(m-k) \log_{10}(\omega). \quad (3.1.13)$$

Autrement dit, pour une fréquence suffisamment grande, la pente du gain d'un filtre est toujours donnée par :

$$n \times 20\text{dB/décade}, \quad (3.1.14)$$

où  $n = (m - k)$  est l'ordre du filtre.

Un calcul similaire sur la phase de la fonction de transfert donne :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg H(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (3.1.15)$$

Autrement dit, le déphasage limite est toujours un nombre entier de fois  $90^\circ$ .

### Exemples

On veut construire un filtre pour un signal basse fréquence dont le spectre est compris entre 0 et 30 Hz, et qui est perturbé par la fréquence du réseau électrique de 50 Hz. Le cahier des charges choisi est le suivant : on ne veut aucune atténuation ni amplification de plus de 1 dB des composantes spectrales du signal de 0 à 30 Hz et une atténuation d'au moins 40 dB pour les harmoniques de fréquences supérieures.

Le gabarit défini sur la figure 3.1.12 permet de respecter le cahier des charges. Sur cette même figure, on montre aussi la différence entre le gain d'un filtre idéal et celui d'un filtre réel.

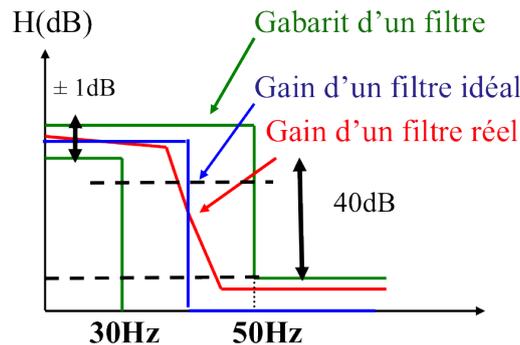


FIGURE 3.1.12 – Exemple de gabarit en accord avec le cahier des charges. La courbe de gain du filtre idéal ou réel est bien contenue dans ce gabarit.

Enfin, la figure 3.1.13 montre le gabarit d'un filtre passe-bande associé à la bande GSM utilisée dans un téléphone mobile.

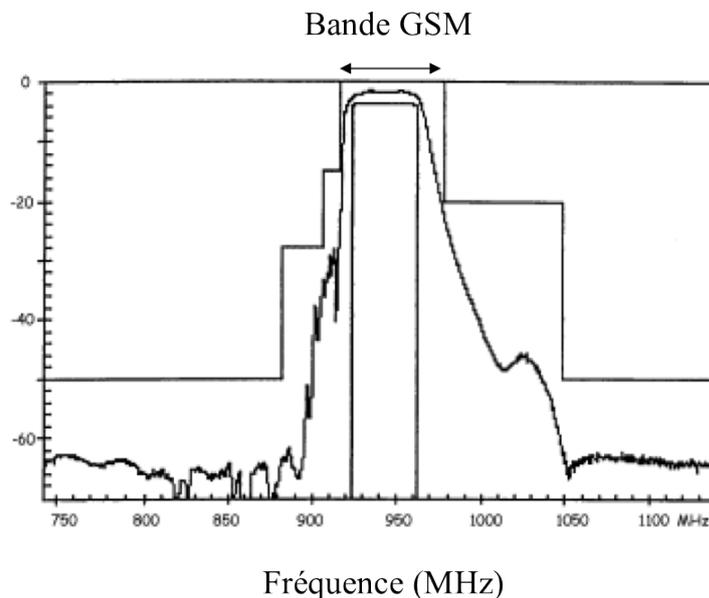


FIGURE 3.1.13 – Gabarit d'un filtre passe-bande pour la bande GSM (<http://www.murata.com/products>).

### 3.2 Démarche pour la synthèse de filtres

La démarche pour la synthèse de filtres suit la procédure décrite dans la figure 3.2.1.

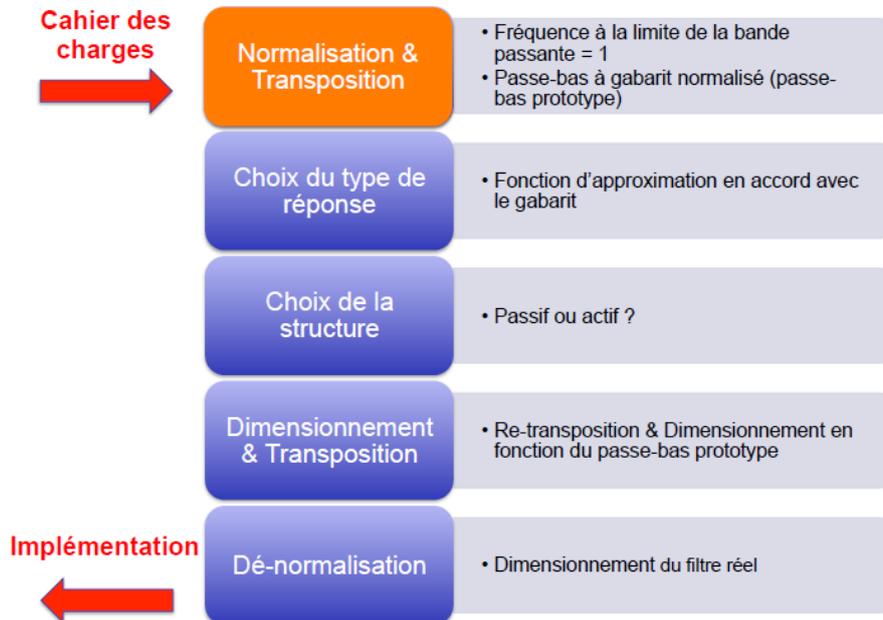


FIGURE 3.2.1 – Démarche générique pour la synthèse de filtres.

En fonction du cahier des charges donné contenant les propriétés attendues du filtre comme par exemple sa fréquence de coupure, son gain dans la bande passante et son atténuation, on procède à une étape dite de **normalisation**. La fréquence caractéristique du filtre est alors ramenée égale à 1 Hz, puis on effectue des opérations qui consistent à ramener tout filtre à un filtre passe-bas, appelé filtre passe-bas prototype. Dans un second temps, on cherche à **approximer** l'allure de sa fonction de transfert par une fonction connue au moyen de polynômes caractéristiques. Les critères de choix de ces polynômes (type, ordre) sont dictés par le cahier des charges. Suivant la **nature** active ou passive du filtre, la suite du traitement sera différente telle que nous le verrons dans le paragraphe suivant. En fonction des étapes précédentes, on procèdera au **dimensionnement** du filtre passe-bas prototype pour répondre au cahier des charges en résolvant les différents éléments du filtre (éléments  $R$ ,  $L$ ,  $C$  par exemple dans le cas de filtres passifs). Enfin, avant implémentation du filtre, il sera nécessaire de **dé-normaliser** le filtre prototype en filtre réel.

#### 3.2.1 Normalisation et transposition

La normalisation permet de ramener l'étude de tout filtre à celui d'un filtre passe-bas. Dans ce paragraphe, nous montrerons les expressions qui résultent de ces normalisations pour chacun des filtres classiques.

##### Normalisation des filtres passe-bas

La normalisation des filtres passe-bas est la plus évidente. Elle consiste à ramener la fréquence de coupure du filtre à une fréquence de 1 Hz. Prenons l'exemple du gabarit de gauche sur la figure 3.2.2. La fréquence de coupure de ce filtre  $f_0$  correspond à une atténuation  $A_p$ , et la fréquence en limite de bande d'atténuation  $A_s$  est donnée par  $f_s$ .

On va donc diviser l'ensemble de l'axe des fréquences par la fréquence de coupure  $f_0$ , et tracer le gabarit avec comme abscisse la quantité  $\Omega = f/f_0$ . On obtient alors le gabarit de droite sur la

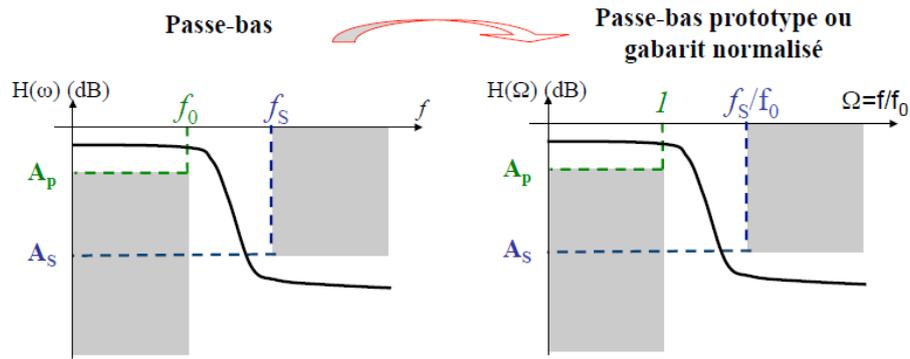


FIGURE 3.2.2 – Normalisation d'un filtre passe-bas du premier ordre.

figure 3.2.2, que l'on nomme gabarit de **passe-bas prototype** ou encore **gabarit normalisé**. La fréquence de coupure a une valeur de 1, et la fréquence en limite de bande d'atténuation est  $f_s/f_0$ . Notons que cette normalisation correspond à une transposition de l'ensemble des variables selon la relation :

$$p \rightarrow \frac{p}{\omega_0} = j \frac{\omega}{\omega_0} = j \frac{f}{f_0} = j\Omega = s. \quad (3.2.1)$$

Ainsi, dans le cas d'un filtre passe-bas du premier ordre, la fonction de transfert normalisée s'écrit :

$$H(s) = \frac{1}{1+s}. \quad (3.2.2)$$

Cette fonction de transfert traduit bien un comportement de type passe-bas, puisque le gain associé tend vers 1 quand  $s$  tend vers 0 et tend vers 0 quand  $s$  tend vers  $+\infty$ .

Considérons maintenant le cas d'un filtre passe-bas du second ordre. La fonction de transfert générique d'un tel filtre est donnée par :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad (3.2.3)$$

où  $Q$  est le facteur de qualité, et  $\omega_0$  la pulsation de résonance. En utilisant à nouveau la règle de normalisation de l'équation 3.2.1, on peut écrire la fonction de transfert normalisée de ce filtre sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{1 + s^2 + \frac{s}{Q}}, \quad (3.2.4)$$

ou de manière identique :

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j\frac{\Omega}{Q}}, \quad (3.2.5)$$

où  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

### Normalisation des filtres passe-haut

On cherche, comme pour les filtres passe-bas, le changement de variable qui permettra de passer d'un filtre passe-haut à un filtre passe-bas normalisé, c'est-à-dire de fréquence de coupure 1 Hz. Pour cela, considérons dans un premier temps un filtre passe haut du premier ordre. Pour un tel filtre la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{\frac{p}{\omega_0}}{1 + \frac{p}{\omega_0}}. \quad (3.2.6)$$

On voit que la manière la plus simple d'effectuer la normalisation de ce filtre est de considérer en premier lieu la normalisation en fréquence du filtre passe-haut selon la figure 3.2.3. On transforme donc la fréquence de coupure  $f_0$  en  $\Omega = 1$ . Implicitement, la fréquence de fin de bande d'atténuation devient  $f_s/f_0$ . La fonction de transfert correspondante s'écrit alors :

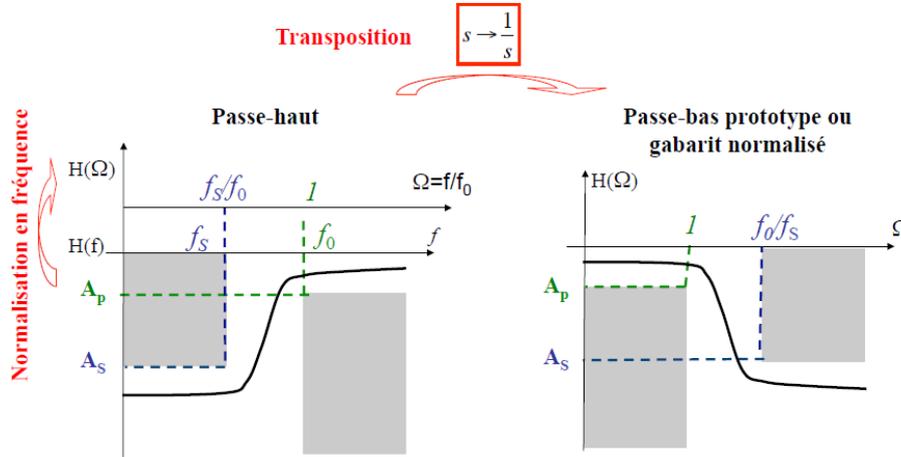


FIGURE 3.2.3 – Transposition d'un filtre passe-haut en filtre passe-bas normalisé.

$$H(s) = \frac{s}{1+s}. \quad (3.2.7)$$

La seconde étape est la transposition du passe-haut en passe-bas. Pour cela on effectue le changement de variable  $s \rightarrow 1/p$ . La fonction de transfert du filtre passe-bas normalisé ainsi obtenu sera :

$$H_{\text{passe-bas,N}}(p) = H_{\text{passe-haut}} \left( s \rightarrow \frac{1}{p} \right) = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{1+p}, \quad (3.2.8)$$

dont la fréquence de coupure est bien égale à 1 Hz. Ainsi, le changement de variable permettant de passer d'un filtre passe-haut à un filtre passe-bas normalisé est  $\frac{p}{\omega_0} \rightarrow \frac{1}{p}$ .

En utilisant ce changement de variable pour un filtre passe haut du 2nd ordre, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad (3.2.9)$$

on arrive bien à la fonction de transfert du filtre passe bas normalisé du deuxième ordre :

$$H_{\text{passe-bas2,N}}(p) = H_{\text{passe-haut2}} \left( s \rightarrow \frac{1}{p} \right) = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{pQ}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}p + p^2}, \quad (3.2.10)$$

### Normalisation du filtre passe-bande

Dans le cas du filtre passe-bande, la difficulté est de normaliser un filtre contenant deux fréquences de coupure en un filtre avec une fréquence de coupure unique. Pour ce faire, il est nécessaire que le filtre soit centré, c'est-à-dire que l'on définisse :

$$f_0 = \sqrt{f_{c1}f_{c2}} = \sqrt{f_{s1}f_{s2}}, \quad (3.2.11)$$

où  $f_0$  est la nouvelle fréquence de résonance,  $f_{ci}$  sont les fréquences de coupures associées à la bande passante, et  $f_{si}$  les fréquences associées à la bande d'atténuation, telles que décrites sur la figure 3.2.4.

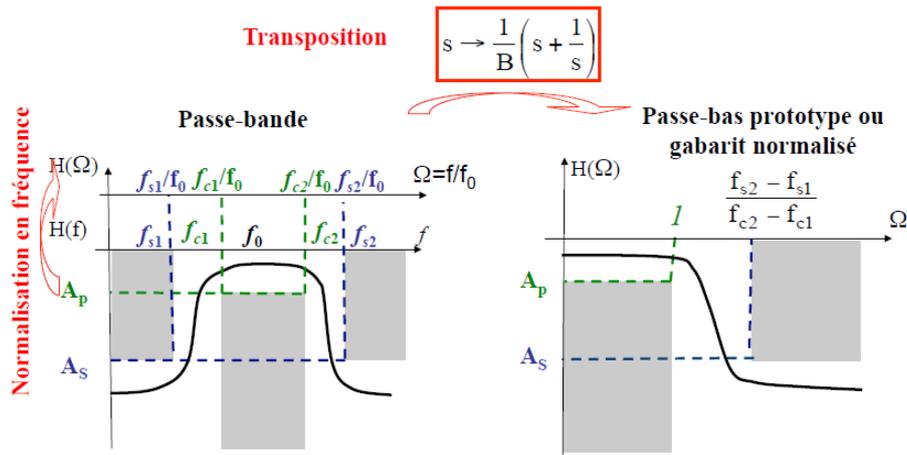


FIGURE 3.2.4 – Transposition d'un filtre passe-bande en filtre passe-bas normalisé.

De la même manière que précédemment, la transposition du filtre passe-bande vers un filtre passe-bas se fera selon la relation suivante :

$$s \rightarrow \frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right), \quad (3.2.12)$$

où on a défini un facteur de bande noté  $B$ , tel que :

$$B = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{c2} - f_{c1}}{f_0}. \quad (3.2.13)$$

Cette relation correspond bien à la somme d'un filtre passe-bas en  $p$  et d'un filtre passe-haut en  $1/p$ .

Ce changement de variable implique que la fréquence d'atténuation normalisée du filtre passe-bas prototype soit donnée par la grandeur  $X_1$  définie par :

$$X_1 = \frac{|f_{s1}^2 - f_0^2|}{f_{s1}(f_{c2} - f_{c1})} = \frac{|f_{s2}^2 - f_0^2|}{f_{s2}(f_{c2} - f_{c1})} = \frac{f_{s2} - f_{s1}}{f_{c2} - f_{c1}}. \quad (3.2.14)$$

Notons que la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 (ordre minimum pour un filtre passe-bande) est donnée par :

$$H(p) = \frac{\frac{p}{Q\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.2.15)$$

Si on utilise le changement de variable de l'équation (3.2.12), le filtre passe-bas normalisé obtenu est d'ordre 4. Cet point sera vu plus en détails lors du TP 1 portant sur le filtrage.

### Normalisation du filtre coupe-bande

Dans le cas du filtre coupe-bande, il est aussi nécessaire que le filtre soit centré, c'est-à-dire que l'on définisse encore une fois :

$$f_0 = \sqrt{f_{c1}f_{c2}} = \sqrt{f_{s1}f_{s2}}, \quad (3.2.16)$$

avec  $f_0$  la nouvelle fréquence de résonance,  $f_{ci}$  les fréquences de coupures associées à la bande passante et  $f_{si}$  les fréquences associées à la bande d'atténuation, telles que décrites en figure 3.2.5. La transposition du filtre coupe-bande vers un filtre passe-bas se fera en utilisant la relation suivante :

$$s \rightarrow \frac{1}{B} \left( p + \frac{1}{p} \right), \quad (3.2.17)$$

où le facteur de bande noté  $B$ , est défini cette fois-ci de la manière suivante :

$$B = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{s2} - f_{s1}}{f_0}. \quad (3.2.18)$$

La fréquence d'atténuation normalisée du filtre passe-bas prototype  $X_1$  est alors donnée par :

$$X_1 = \frac{f_{c2} - f_{c1}}{f_{s2} - f_{s1}}, \quad (3.2.19)$$

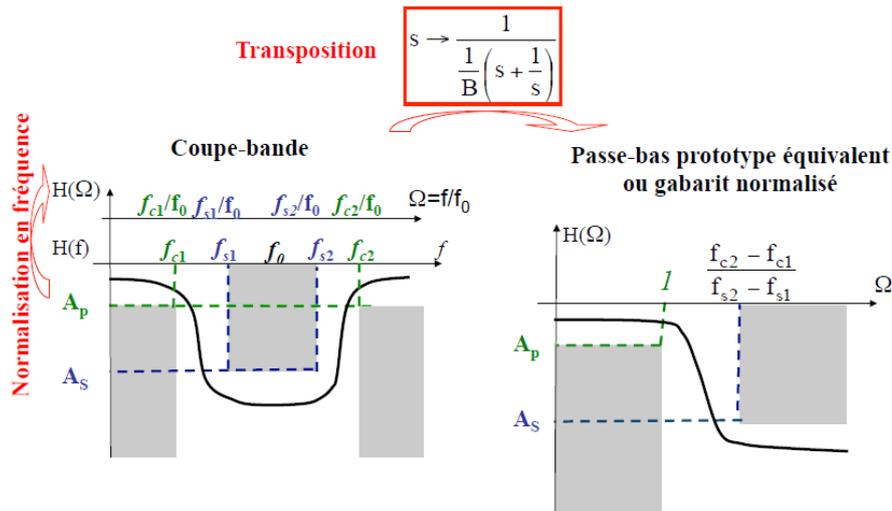


FIGURE 3.2.5 – Transposition d'un filtre coupe-bande en filtre passe-bas normalisé.

Dans le cas du filtre coupe-bande du second ordre, la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.2.20)$$

Ainsi, au final, une fois normalisés, les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande sont sous la forme d'un filtre passe-bas normalisé de fréquence de coupure 1 Hz pour lequel on va maintenant chercher l'approximation polynômiale permettant de décrire au mieux le gabarit défini à partir du cahier des charges.

### 3.2.2 Approximation polynômiale : Choix du type de réponse

Comme nous l'avons dit, le but est de créer un filtre dont le gabarit est décrit dans un cahier des charges. Sur la figure 3.2.6, un exemple de gabarit d'un filtre passe-bas prototype est tracé en vert. La solution idéale correspondante est tracée en bleu : il s'agit d'un filtre parfait dont l'atténuation est supposée tendre vers l'infini. Malheureusement, on a vu que ce filtre idéal n'étant pas causal ne peut pas être réalisé en pratique. On va donc chercher une fonction mathématique (courbe en rouge) permettant la meilleure approximation possible de la réponse du filtre dans le gabarit.

Le choix de la fonction polynômiale d'approximation utilisée va dépendre des exigences du cahier des charges. Cependant, on cherchera à utiliser un **polynôme d'ordre le plus faible** possible afin que la réalisation du filtre reste la plus simple possible. Nous allons donc détailler les différentes fonctions polynômiales connues avec leurs points forts et leurs points faibles.

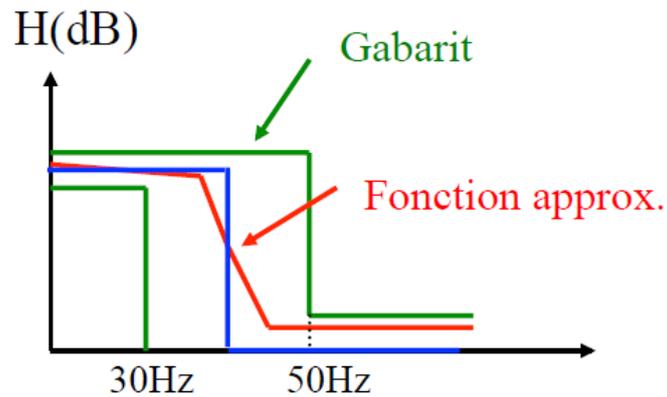


FIGURE 3.2.6 – Schématisation de la recherche d'une fonction d'approximation permettant de répondre au cahier des charges (c'est-à-dire une fonction contenue dans le gabarit du passe-bas prototype).

### Polynômes d'approximation de Butterworth

Ce type de polynôme d'approximation est celui pour lequel le gain est maximum pour la fréquence nulle et le plus constant possible dans la bande passante. Ce type de polynôme obéit au critère de méplat. Cela signifie que l'avantage majeur de ce filtre est un **gain quasi constant dans la bande passante**. Cependant, comme cela est visible sur la figure 3.2.7, son principal inconvénient est que la chute de gain en bande atténuée est faible. Cela signifie qu'il faudra envisager un polynôme d'ordre élevé pour obtenir des filtres très sélectifs.

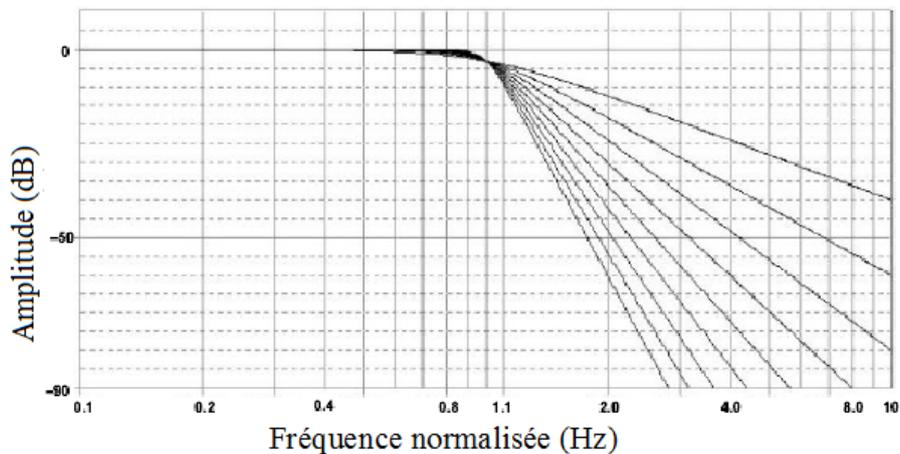


FIGURE 3.2.7 – Réponse en fréquence de filtres de Butterworth à différents ordres.

La fonction de transfert de ce filtre à l'ordre  $n$  est donnée par :

$$|H(p)|^2 = \frac{K}{1 + (-1)^n p^{2n}} \quad (3.2.21)$$

L'expression du gain du filtre en dB est donc donnée par la relation :

$$H_{dB} = -10 \log(1 + \omega^{2n}). \quad (3.2.22)$$

Cela signifie que pour les basses fréquences, le gain  $H_{dB}$  tend vers une constante, et que pour les

hautes fréquences son expression devient :

$$H_{dB} = -20 \log(\omega), \quad (3.2.23)$$

c'est-à-dire une atténuation de 20dB par décade et par ordre du filtre.

Pour un filtre de Butterworth, la réponse fréquentielle reste plate dans la bande passante. Sur la figure 3.2.8, pour un filtre d'ordre 11 (en rouge), la décomposition du polynôme dénominateur de la fonction de transfert en éléments simples montre une contribution d'un élément d'ordre 1 (en pointillés verts) et de cinq d'ordre 2 (courbes bleues et violettes) dans la réponse globale. La présence d'une contribution d'ordre 1 n'apparaît que lorsque l'ordre global est impair.

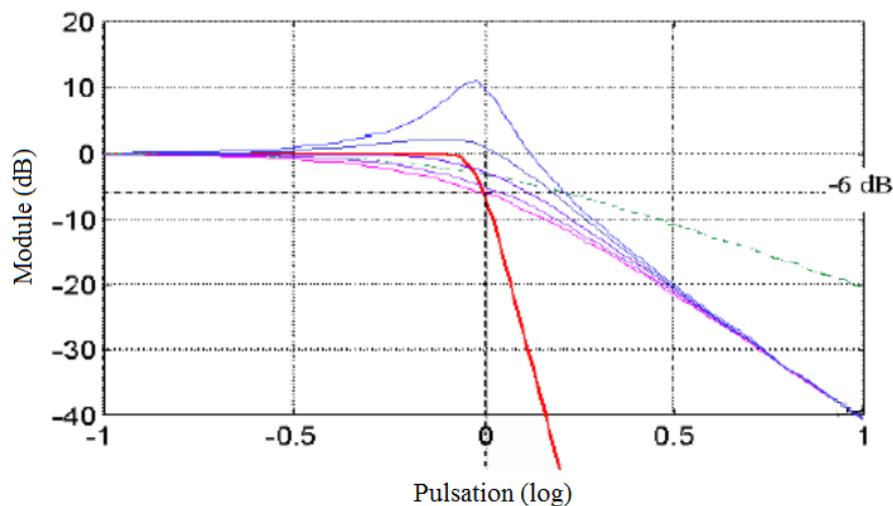


FIGURE 3.2.8 – Contributions fréquentielles élémentaires à la réponse d'un filtre d'ordre 11 (5 facteurs d'ordre 2 et 1 facteur d'ordre 1) (<http://refaudio.wifeo.com/documents/Filtrage-analogique-temps-continu.pdf>).

### Polynômes d'approximation de Tchebychev

Ce type de polynôme d'approximation a la particularité d'admettre des **oscillations de gain à amplitude constante dans la bande passante**. Il a aussi l'avantage de présenter l'**atténuation la plus forte** et donc la meilleure sélectivité. Sur la figure 3.2.9 sont représentés différents ordres  $n$  de polynômes de Tchebychev pour un amplitude d'oscillation de 1dB. En effet, comme on peut le voir sur l'agrandissement à droite, l'amplitude en dB de ces oscillations ne dépasse jamais 1 dB.

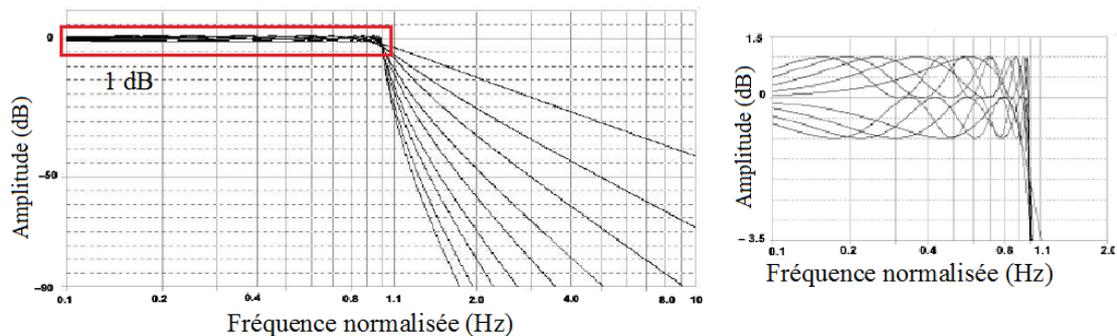


FIGURE 3.2.9 – Réponse en fréquence d'un filtre de Tchebychev à 1dB d'oscillation à différents ordres.

La fonction de transfert de ce filtre à l'ordre  $n$  est donnée par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}, \quad (3.2.24)$$

avec la fonction  $T_n$  telle que :

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos(\arccos x), x \leq 1 \\ T_n(x) = \cosh(\arg \cosh x), x > 1 \end{cases} \quad (3.2.25)$$

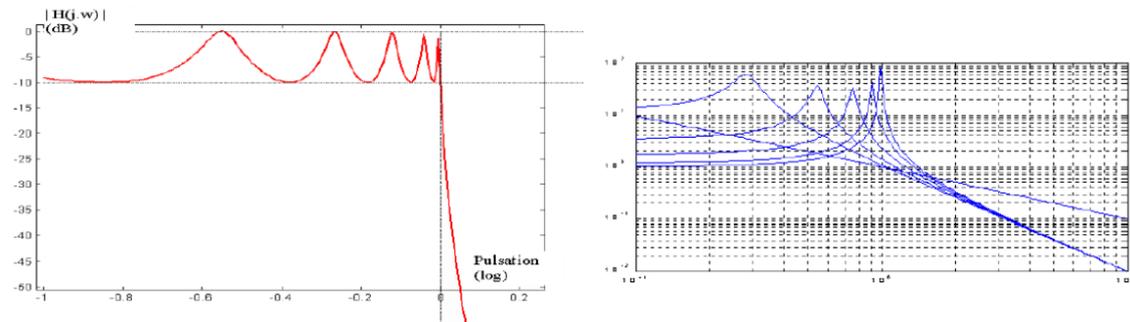
Dans cette expression, le taux d'ondulation dans la bande passante est lié à la valeur de  $\varepsilon$  par la relation :

$$\Delta_{dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\Delta_{dB}}{10}} - 1}. \quad (3.2.26)$$

Ainsi, le comportement asymptotique pour les hautes fréquences du gain  $H_{dB}$  s'écrit :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H_{dB} = -20 \log(\varepsilon) - 20 \log(n-1) \log(2) - 20n \log(\omega), \quad (3.2.27)$$

c'est-à-dire une atténuation supérieure à 20dB par décade et par ordre du filtre. La différence avec un filtre de Butterworth à ordre équivalent est une atténuation supplémentaire de  $-20 \log(\varepsilon) - 6(n-1)$ . Pour un filtre de Tchebychev, la réponse fréquentielle n'est plus plate dans la bande passante. Sur la figure 3.2.10, pour un filtre d'ordre 11 (en rouge), la décomposition du polynôme dénominateur de la fonction de transfert en éléments simples montre une contribution d'un élément d'ordre 1 (isolée en bleu) et de cinq d'ordre 2 (courbes bleues rassemblées) dans la réponse globale. Notons qu'ici, chaque contribution à la réponse globale possède une fréquence de coupure différente.



**FIGURE 3.2.10** – Réponse fréquentielle globale et contributions fréquentielles élémentaires à la réponse d'un filtre d'ordre 11 à 10 dB d'oscillation (5 facteurs d'ordre 2 et 1 facteur d'ordre 1) (<http://refaudio.wifeo.com/documents/Filtrage-analogique-temps-continu.pdf>).

### Polynômes d'approximation de Bessel

Ce type de polynôme d'approximation a comme principal avantage d'avoir une **phase la plus linéaire possible dans la bande passante**. Comme dans le cas de Butterworth, ce type de filtre montre une **atténuation lente** et sera donc moins sélectif qu'un filtre de Tchebychev. Sur la figure 3.2.11 les différents ordres  $n$  des polynômes de Bessel sont représentés.

La fonction de transfert de ce filtre à l'ordre  $n$  est donnée par :

$$H(p) \approx e^{-p} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{B_n(p)}, \quad (3.2.28)$$

avec

$$B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p), \quad (3.2.29)$$

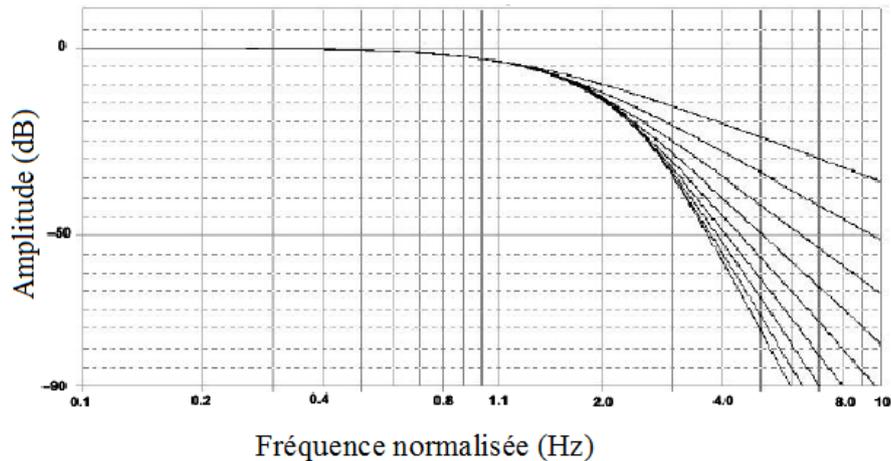


FIGURE 3.2.11 – Réponse en fréquence d'un filtre de Bessel à différents ordres.

et

$$B_1(p) = P + 1 \text{ et } B_0(p) = 1, \quad (3.2.30)$$

où les polynômes  $B_n$  sont des polynômes de Bessel.

Aux basses fréquences, le gain  $H_{dB}$  est très faible et peut être approximé par  $3\omega^2$  pour  $\omega \leq 2$ . Aux hautes fréquences, la dépendance des polynômes donnent un gain en  $-20\log(\omega)$ , donc une atténuation de 20dB par décade et par ordre du filtre.

Le tableau 3.2.1 présente une synthèse des résultats obtenus dans les paragraphes précédants.

	Butterworth	Tchebychev	Bessel
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Réponse plate en bande passante</li> <li>- Bon temps de propagation</li> <li>- Calculs faciles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Front de coupure le plus raide</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Phase la plus linéaire</li> <li>- Bon temps de propagation</li> </ul>
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Coupure moyenne</li> <li>- Atténuation en bande passante à -3dB</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ondulation dans la bande passante</li> <li>- Temps de propagation variable</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Coupure faible</li> </ul>
Détermination de l'ordre	$n \geq \frac{\ln(10^{-A_s/10} - 1)}{2\ln(X_1)}$	$n \geq \frac{\arg \cosh\left(\sqrt{\frac{10^{-A_s/10} - 1}{10^{-A_c/10} - 1}}\right)}{\arg \cosh(X_1)}$	
Applications	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Appareils de mesure (voltmètres)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Suppression de signaux parasites de fréquences proches</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Transmission de signaux proches</li> </ul>

TABLE 3.2.1 – Tableau récapitulatif des différentes fonctions d'approximation du passe-bas prototype.

Les filtres de Butterworth, à bande passante plate, sont de bons candidats pour des applications de mesure comme dans le cas de voltmètres. Les filtres de Tchebychev, présentant des oscillations en bande passante mais une coupure en fréquence beaucoup plus nette, sont adaptés dans le cas où l'on souhaite supprimer des signaux parasites de fréquences proches de celle du signal utile. Enfin les filtres de Bessel, présentant la meilleure linéarité de la phase dans la bande passante, sont à privilégier pour la transmission de signaux.

Concernant la transmission de signaux justement, il est intéressant de regarder la réponse dans le domaine temporel d'un signal créneau pour ces trois types de filtres. Le résultat est présenté sur les trois oscillogrammes de la figure 3.2.12 .

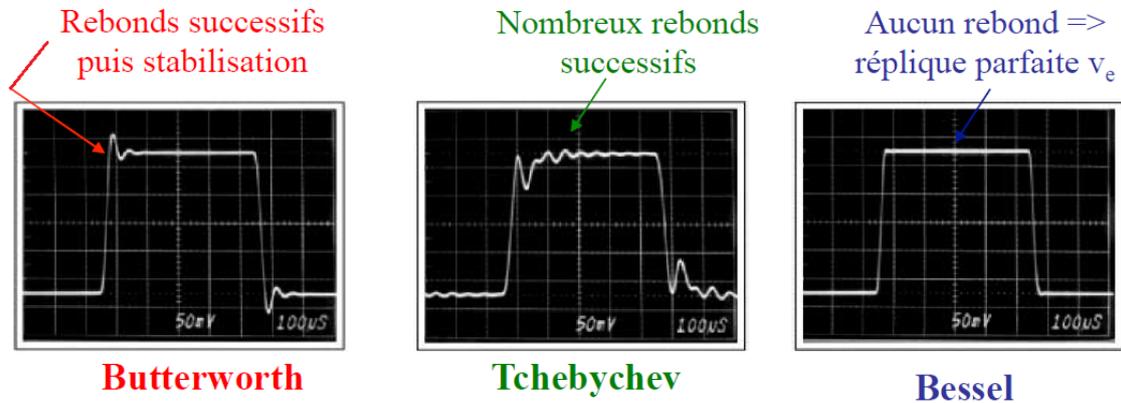


FIGURE 3.2.12 – Oscillogrammes d'un signal créneau filtré par les trois types de filtre (<http://www.ti.com/lit/an/sbfa002/sbfa002.pdf>).

Dans le cas de Butterworth, on remarque quelques oscillations aux transitions du signal créneau puis une stabilisation rapide. A l'inverse, dans le cas de Tchebychev, de part les oscillations en bande passante, le filtre met plus de temps à stabiliser le signal, conduisant à l'apparition de nombreux rebonds à chaque transition du signal créneau. Enfin, dans le cas de Bessel, l'excellente linéarité de sa bande passante (en particulier de sa phase) rend le signal aussi proche que possible de celui du signal créneau d'origine, mais avec des transitions entre l'état bas et l'état haut bien plus lentes. La figure 3.2.13 représente les trois fonctions d'approximation utilisées pour ces résultats.

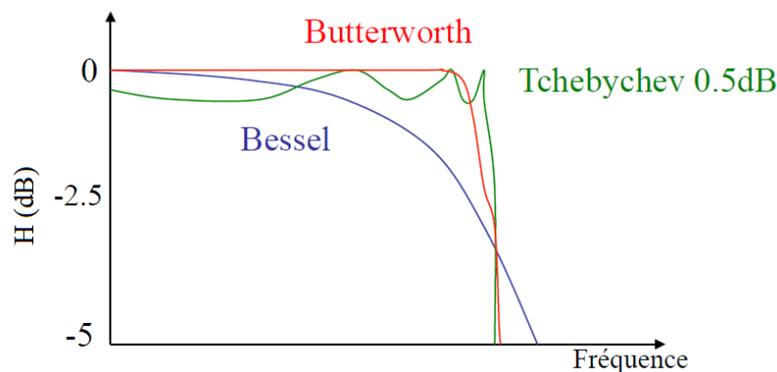


FIGURE 3.2.13 – Fonctions de transfert des polynômes d'approximation utilisés pour chaque cas de la figure 3.2.12.

Une fois le choix du type et de l'ordre du filtre passe-bas normalisé effectué, on peut écrire sa fonction de transfert sous la forme :

$$H(s)_{LPN} = \prod_i \frac{|s_i|^2}{(s - s_i)(s - \bar{s}_i)}, \quad (3.2.31)$$

où  $s_i = s_r + is_i$  sont les racines du polynôme choisis (voir figure 3.2.14 pour les racines des polynômes de Butterworth), et  $\bar{s}_i$  est le complexe conjugué de  $s_i$ . Pour chaque section d'ordre 2 on

**Filtres de Butterworth**

Ordre	s1	s2	s3	s4
2	-707.1068e-003 + 707.1068e-003i			
4	-382.6834e-003 + 923.8795e-003i	-923.8795e-003 + 382.6834e-003i		
6	-258.8190e-003 + 965.9258e-003i	-707.1068e-003 + 707.1068e-003i	-965.9258e-003 + 258.8190e-003i	
8	-195.0903e-003 + 980.7853e-003i	-555.5703e-003 + 831.4696e-003i	-831.4696e-003 + 555.5703e-003i	-980.7853e-003 + 195.0903e-003i

**FIGURE 3.2.14** – Racines des polynômes de Butterworth d'ordre pair de 2 à 8.

peut le réécrire sous la forme :

$$H(s)_{LPN} = \frac{\Omega_{BF}^2}{s^2 + \frac{\Omega_{BF}}{Q_{BF}}s + \Omega_{BF}^2}, \quad (3.2.32)$$

où  $\Omega_{BF} = |s_i|$ , et  $Q_{BF} = -\frac{\Omega_{BF}}{2s_r}$ .

**3.2.3 Type de filtres : Choix de la structure**

Le tableau 3.2.2 présente les spécificités des filtres passifs et actifs qui vont engendrer une différence de traitement lors de la synthèse du filtre.

Filtres passifs	Filtres actifs
Composants R, L, C <b>Inconvénient</b> : les inductances sont chers et peu intégrable avec des réglages délicats	Composants R et C. L est évité <b>Avantage</b> : faible coût et meilleure intégration (encombrement) avec des réglages aisés
Pas d'amplification Coefficients de qualité Q faibles	Amplification possible Coefficients Q potentiellement élevés
Les caractéristiques du filtre <b>dépendent de la charge</b>	Les caractéristiques du filtre sont <b>indépendantes de la charge</b>
<b>Avantage</b> : pas de source d'alimentation	Source d'alimentation indispensable
Les éléments passifs engendrent peu de bruit <b>Avantage</b> : sensibilité aux composants utilisés faible ou moyenne	Le bruit peut être gênant Sensibilité aux composants utilisés plus élevée

**TABLE 3.2.2** – Tableau récapitulatif des différences entre type de filtres passifs et actifs.

Le premier inconvénient des filtres passifs est la possibilité de contenir des inductances, relativement chères et peu intégrables. C'est la principale raison d'utilisation des filtres actifs. Cependant, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, les filtres actifs utilisant donc par définition des éléments actifs peuvent être limités en terme de fréquence d'utilisation. De plus, une source d'alimentation est indispensable au fonctionnement des filtres actifs. Un autre avantage des filtres passifs est leurs relativement faible sensibilité aux composants constitutifs du filtre permettant ainsi une meilleure stabilité.



dé-normalisation, *i.e.* en utilisant le changement de variable  $s \rightarrow \frac{s}{f_c}$ , où  $f_c$  est la fréquence de coupure du filtre réel :

$$H(s) = \frac{\Omega_{BF}^2 \omega_c^2}{s^2 + \frac{\Omega_{BF} \omega_c}{Q_{BF}} s + \Omega_{BF}^2 \omega_c^2}, \quad (3.2.34)$$

On obtient alors les fréquences de résonances et les facteurs de qualité du filtre réel pour chaque section par les relations suivantes :

$$f_0 = \Omega_{BF} f_c, \quad (3.2.35)$$

et

$$Q = Q_{BF}. \quad (3.2.36)$$

Cette identification permet, en considérant  $R_2 = R_4 + 5k\Omega$ , d'obtenir les expressions des résistances  $R_1$  à  $R_4$  qu'il faut utiliser pour satisfaire le cahier des charges :

$$R_2 = \frac{2 \cdot 10^9}{f_c}, \quad (3.2.37)$$

$$R_3 = QR_2 \left( \frac{R_X}{R_Y} \right), \quad (3.2.38)$$

et

$$R_1 = \frac{R_2}{H_{LP(0)}} \left( \frac{R_X}{R_Y} \right), \quad (3.2.39)$$

où  $\frac{R_X}{R_Y} = \frac{1}{5}$ .

### 3.3 Structures classiques de filtres actifs

On appelle filtre actif tout filtre contenant au moins un élément actif dans son circuit.

#### 3.3.1 Caractéristiques générales

Les filtres actifs sont constitués de résistances et de capacités ainsi qu'un ou plusieurs éléments actifs. Les inductances, chères et difficiles à intégrer sont exclues. Les composants actifs de ces filtres sont le plus souvent des amplificateurs opérationnels. Comparés aux filtres passifs, les filtres actifs présentent des caractéristiques distinctes, en particulier :

- ils ne sont pas obligatoirement stables ;
- à cause de la limite fréquentielle des composants actifs, ils sont souvent limités à des utilisations aux basses fréquences, en dessous du MHz ;
- les amplificateurs opérationnels ayant des impédances d'entrée infinie et de sortie nulle, ils peuvent avoir une fonction de transfert indépendante de leur environnement (source et charge). Leurs caractéristiques sont donc indépendantes de cet environnement ;
- il existe des méthodes automatiques de synthèse qui conduisent à des schémas simples et réalisables.

Les filtres actifs sont réalisés en associant des étages d'ordre 1 et d'ordre 2, correspondant aux pôles de la fonction de transfert  $H(p)$ . Nous décrirons dans la suite de ce paragraphe deux types de filtres actifs fréquemment utilisés : les filtres de Sallen & Key et les filtres de Rauch.

#### 3.3.2 Filtres de Sallen & Key

La structure de ces filtres actifs a été proposée en 1965 par R.P. Sallen & E.L. Key, dans un article "A practical method of designing RC active filters" dans IEE Trans. CT2 (pages 74 à 85). La figure 3.3.1 montre la structure d'un filtre de Sallen & Key d'ordre 2.

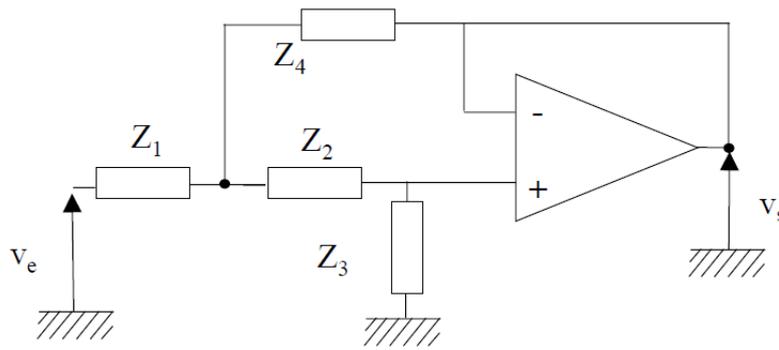


FIGURE 3.3.1 – Schéma d'une cellule d'ordre 2 pour un filtre de Sallen & Key.

La fonction de transfert de ce filtre peut être écrite à partir des admittances associées aux impédances  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  et  $Z_4$  sous la forme :

$$H(p) = -\frac{Y_2 Y_1}{Y_3(Y_2 + Y_4) + Y_1(Y_2 + Y_3)} \quad (3.3.1)$$

Cette structure permet de réaliser des filtres **passse-bas** et **passse-haut**. Bien qu'il soit aussi possible d'obtenir une structure passe-bande, elle est rarement utilisée.

#### Cellules RC pour filtres passe-bas

La figure 3.3.2 détaille les impédances utilisées pour obtenir une cellule d'ordre 2 de filtre passe-bas. Les résistances sont toutes identiques, le réglage étant réalisé grâce au choix des valeurs de capacités.

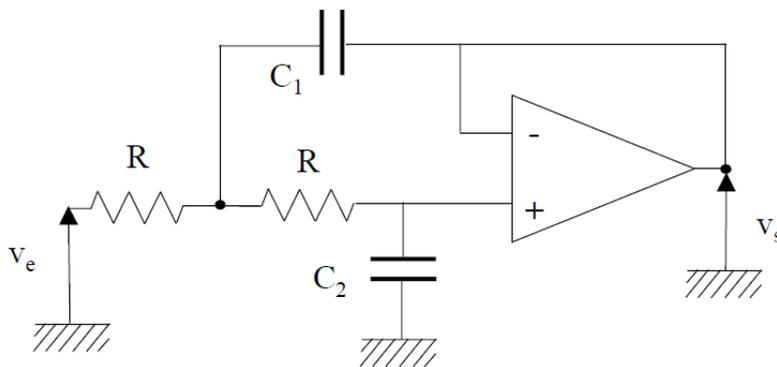


FIGURE 3.3.2 – Cellule d'ordre 2 pour un filtre passe-bas de Sallen & Key.

La fonction de transfert associée à cette cellule d'ordre 2 de filtre passe-bas est donc :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad (3.3.2)$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \text{ et } Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}. \quad (3.3.3)$$

Pour constituer une cellule passe-bas d'ordre 3, il suffit d'ajouter en tête de la cellule d'ordre 2 un filtre passe-bas RC d'ordre 1. On obtient alors le montage de la figure 3.3.3.

Notons qu'à la vue de la forme de la fonction de transfert et du montage, l'interversion des éléments  $R$  et  $C$  dans le schéma permet d'obtenir des filtres actifs passe-haut d'ordre 2 et 3.

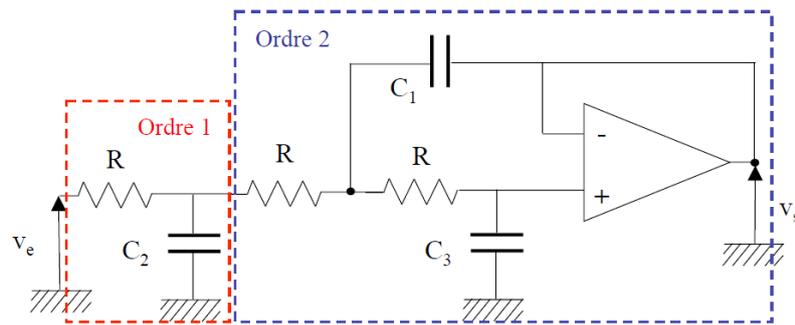


FIGURE 3.3.3 – Cellule d'ordre 3 pour un filtre passe-bas de Sallen & Key.

### Dimensionnement des impédances des cellules élémentaires

Pour une structure de filtre donnée, comme celle de Sallen & Key considérée ici, les étapes de normalisation en fréquence et de transposition en un passe-bas prototype peuvent être synthétisées sous la forme d'un tableau. Les éléments d'un tel tableau, donnés pour les filtres de Sallen &

Ordre	Filtres de Bessel					Filtres de Butterworth				
	Etage du 2eme ordre		Etages du 3eme ordre			Etages du second ordre		Etages du 3eme ordre		
	K1	K2	K1	K2	K3	K1	K2	K1	K2	K3
2	0,9066	0,6799				1,414	0,707			
3			1,423	0,988	0,2538			3,546	1,392	0,2024
4	0,7351 1,012	0,6746 0,3900				1,082 2,613	0,9241 0,3825			
5	1,041	0,3098	1,009	0,8712	0,3095	3,235	0,3089	1,753	1,354	0,4214
6	0,6352 0,7225 1,073	0,6098 0,4835 0,2561				1,035 1,414 3,863	0,966 0,7071 0,2598			
7	0,725 1,098	0,4151 0,2164	0,8532	0,7792	0,3027	1,604 4,493	0,6235 0,2225	1,531	1,336	0,4885

Degré	Filtres de Tchebytschef 1dB					Tchebytschef 3dB				
	Etages du second ordre		Etages du 3eme ordre			Etages du second ordre		Etages du 3eme ordre		
	K1	K2	K1	K2	K3	K1	K2	K1	K2	K3
2	2,218	0,6061				3,103	0,4558			
3			16,18	2,567	0,0643			43,42	3,629	0,0253
4	3,125 7,546	1,269 0,1489				4,863 11,74	1,049 0,0943			
5	1,155	0,0935	8,884	3,935	0,2540	18,22	0,0586	15,79	5,917	0,1600
6	4,410 6,024 16,46	1,904 0,3117 0,0642				7,012 9,575 26,15	1,607 0,2002 0,0400			
7	7,941 22,25	0,1993 0,0468	10,29	5,582	0,4012	12,67 35,53	0,1257 0,0291	17,93	8,236	0,2621
8	5,756 6,792 10,15 28,94	2,538 0,4435 0,1395 0,0357				9,217 10,87 16,27 46,34	2,156 0,2866 0,0873 0,0221			

FIGURE 3.3.4 – Table des coefficients  $K_{ni}$  à utiliser pour dimensionner un filtre de Sallen & Key, en fonction du polynôme d'approximation d'ordre  $n$  considéré.

Key dans la figure 3.3.4, sont ainsi directement utilisés pour calculer les capacités nécessaires à la réalisation du filtre décrit dans le cahier des charges. Dans le cas des filtres passe-bas, les capacités  $C_i$  de la cellule d'ordre  $n$  sont données par le rapport de la valeur des constantes  $K_{ni}$  du passe-bas prototype divisée par le produit de  $R$  et de la fréquence de coupure  $\omega_0$  :

$$C_i = \frac{K_{ni}}{R\omega_0}. \quad (3.3.4)$$

Dans le cas des filtres passe-haut, par analogie, les résistances  $R_i$  de la cellule d'ordre  $n$  sont

données par l'inverse du produit des valeurs des  $K_{ni}$  du passe-bas prototype, de  $C$  et de la fréquence de coupure  $\omega_0$  :

$$R_i = \frac{1}{K_{ni}C\omega_0}. \quad (3.3.5)$$

### 3.3.3 Filtres de Rauch

La structure de ces filtres actifs, plus récente, est décrite sur la figure 3.3.5 pour une cellule d'ordre 2.

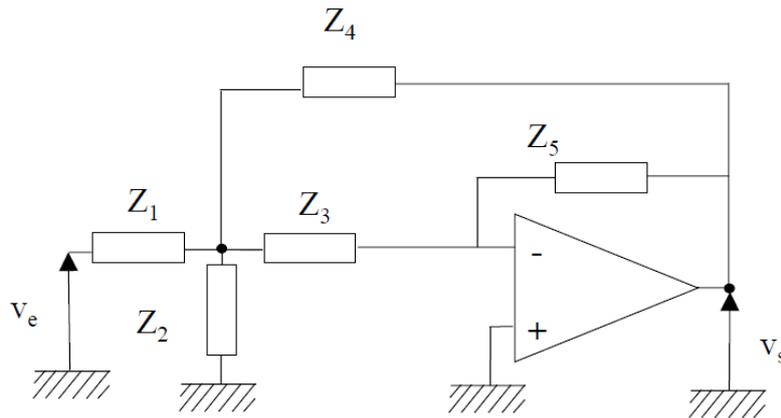


FIGURE 3.3.5 – Schéma d'une cellule d'ordre 2 pour un filtre de Rauch.

Ce filtre est constitué d'un amplificateur opérationnel monté avec dans la boucle de contre réaction négative une impédance  $Z_5$ . La fonction de transfert de ce filtre peut être écrite à partir des admittances associées aux impédances  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$  et  $Z_5$  sous la forme :

$$H(p) = -\frac{Y_3 Y_1}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \quad (3.3.6)$$

Cette structure permet de réaliser des filtres **passse-bas**, **passse-haut**, mais aussi **passse-bande**.

#### Cellules RC pour filtres passe-bas

La figure 3.3.6 détaille les impédances utilisées pour obtenir une cellule d'ordre 2 de filtre passe-bas. Comme pour la structure de Sallen & Key les résistances sont toutes identiques.

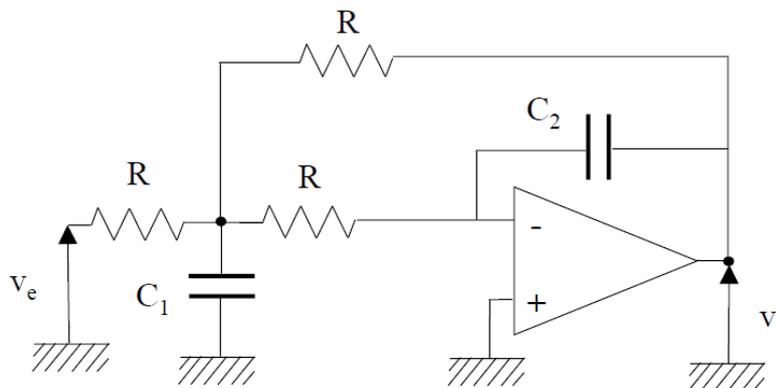


FIGURE 3.3.6 – Cellule d'ordre 2 pour un filtre passe-bas de Rauch.

Pour constituer une cellule passe-bas d'ordre 3, il suffit d'ajouter en tête de la cellule d'ordre 2 un filtre passe-bas RC d'ordre 1. On obtient alors la figure 3.3.7.

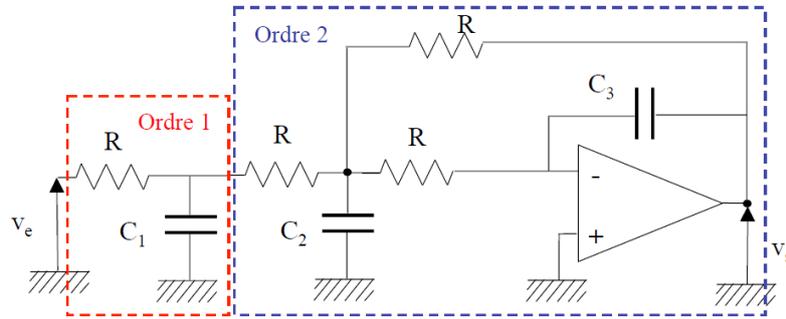


FIGURE 3.3.7 – Cellule d'ordre 3 pour un filtre passe-bas de Rauch.

**Dimensionnement des impédances des cellules élémentaires**

Comme pour la structure de Sallen & Key, on peut tabuler les coefficients  $K_{ni}$  nécessaire au dimensionnement des filtres de Rauch. Ces coefficients sont donnés sur la figure 3.3.8.

Degré	Filtres De Bessel					Butterworth				
	Ordre 2		3eme		Ordre	Second		Troisième ordre		
	K1	K2	K1	K2	K3	K1	K2	K1	K2	K3
2	1	0.33				2,12	0.47			
3			1,19	0.69	0.160			2,37	2.59	0.32
4	0.51	0.21				3,19	0.25			
	0.71	0.12				1,62	0.61			
5			0.76	0.39	0.12			2,16	4.31	0.21
	0.64	0.085				1.85	0.54			
6	0.35	0.15				5.79	0.17			
	0.40	0.12				2.12	0.47			
	0.59	0.063				1.55	0.64			

Degré	Tchebycheff 1dB					Tchebycheff 3 dB				
	Ordre 2		Ordre 3			Ordre 2		Ordre 3		
	K1	K2	K1	K2	K3	K1	K2	K1	K2	K3
2	2.73	0.33				4,65	0.30			
3			4.21	5,84	0.16			6,81	9.87	0.12
4	10.75	0.094				17,6	0.063			
	4,45	0.80				7,29	0.70			
5			6,96	16,56	0.060			11,3	27,23	0.039
	6.40	0.36				10,44	0.254			
6	24.12	0.041				39,24	0.0267			
	8.82	0.20				14,36	0.133			
	6.46	1.24				10,51	1.07			
7			9.77	32.5	0.030			15.83	53,14	0.019
	11.7	0.13				19,02	0.084			
	8.10	0.53				13,16	0.37			

FIGURE 3.3.8 – Table des coefficients  $K_{ni}$  à utiliser pour dimensionner un filtre de Rauch, en fonction du polynôme d'approximation d'ordre  $n$  considéré.

Pour les filtres passe-bas, les capacités  $C_i$  sont encore calculées à partir de l'équation (3.3.4), et pour les filtres passe-haut les résistances  $R_i$  à partir de (3.3.5).

**Cellules RC pour filtres passe-bande**

La figure 3.3.9 détaille les impédances utilisées pour obtenir une cellule d'ordre 2 de filtre passe-bande. Ici, les capacités sont toutes identiques.

La fonction de transfert associée à cette cellule d'ordre 2 de filtre passe-bande est :

$$H(p) = - \frac{\frac{p}{Q\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \tag{3.3.7}$$

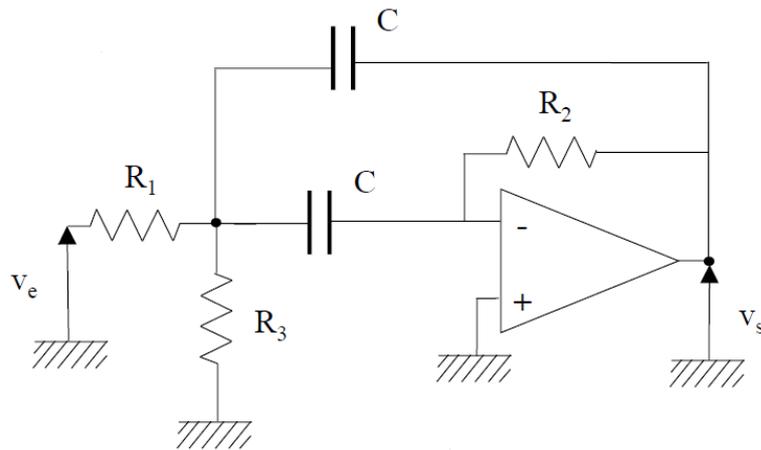


FIGURE 3.3.9 – Cellule d'ordre 2 pour un filtre passe-bande de Rauch.

avec :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}}}{C\sqrt{R_1 R_2}}, \quad (3.3.8)$$

et

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right)}. \quad (3.3.9)$$

Les valeurs de  $Q$  et de  $\omega_0$  obtenues après dé-normalisation permettent alors de calculer les valeurs des résistances  $R_1$ ,  $R_2$ , et  $R_3$ .

### 3.4 Synthèse de filtres passifs (Optionnel)

#### 3.4.1 Rappels sur les structures de filtres passifs RLC

Ce paragraphe regroupe les schémas et expressions de fonction de transfert dans le cas des filtres RC et RLC classiques.

##### Filtre passe-bas et passe-haut du 1er ordre

Les filtres passe-bas et passe-haut du premier ordre sont obtenus à partir de circuits RC où la tension de sortie est prise soit sur la résistance soit sur la capacité.

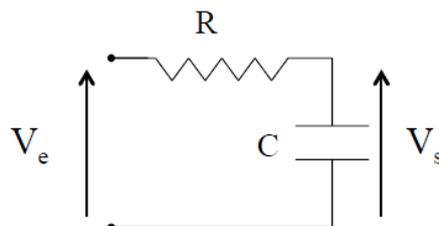


FIGURE 3.4.1 – Schéma d'un filtre passe-bas du premier ordre avec des éléments RC.

Comme le montre la figure 3.4.1, le filtre passe-bas correspond à une tension de sortie au niveau de la capacité. La fonction de transfert s'obtient facilement en considérant le diviseur de tension entre

$V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{V_e \times \frac{1}{jC\omega}}{\frac{jRC\omega + 1}{\frac{1}{jC\omega}}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (3.4.1)$$

Il est toujours possible de remplacer la quantité  $j\omega$  par la quantité  $p$  pour se ramener à l'espace de Laplace. Dans le cas du filtre passe-bas du 1er ordre, la fréquence de coupure est donc donnée par :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.4.2)$$

Dans le cas du filtre passe-haut du premier ordre, la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance comme indiqué sur la figure 3.4.2. Dans ce cas, la fonction de transfert s'obtient en

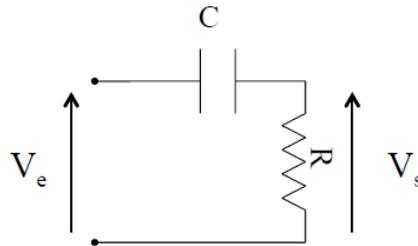


FIGURE 3.4.2 – Schéma d'un filtre passe-haut du premier ordre avec des éléments RC.

considérant le diviseur de tension entre  $V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{V_e \times R \times pC}{pRC + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{p}{1 + \frac{p}{\omega_0}}. \quad (3.4.3)$$

Dans le cas du filtre passe-haut du 1er ordre, la fréquence de coupure est identique à celle du filtre passe-bas, donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.4.4)$$

### Filtre passe-bas et passe-haut du 2nd ordre

Les filtres passe-bas et passe-haut du second ordre sont obtenus à partir de circuits  $RLC$  où la tension de sortie est prise soit sur la capacité, soit sur l'inductance.

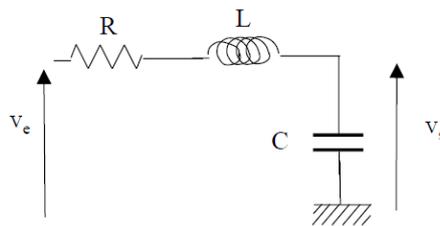


FIGURE 3.4.3 – Schéma d'un filtre passe-bas du second ordre avec des éléments RLC.

Comme le montre la figure 3.4.3, le filtre passe-bas correspond à une tension de sortie au niveau de la capacité. La fonction de transfert s'obtient en considérant le diviseur de tension entre  $V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times \frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{V_e}{pRC + p^2LC + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.4.5)$$

Dans le cas du filtre passe-bas du 2nd ordre, la fréquence de coupure est donc donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.4.6)$$

On fait alors apparaître une nouvelle grandeur  $Q$ , le facteur de qualité du filtre qui est défini par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (3.4.7)$$

Dans le cas du filtre passe-haut du second ordre, la tension de sortie est prise aux bornes de l'inductance comme indiqué sur la figure 3.4.4. Dans ce cas, la fonction de transfert s'obtient en

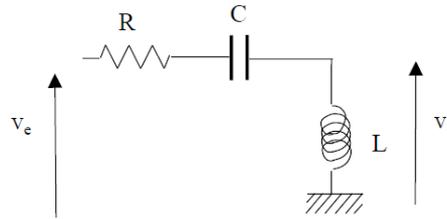


FIGURE 3.4.4 – Schéma d'un filtre passe-haut du second ordre avec des éléments RLC.

considérant le diviseur de tension entre  $V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times pL}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{V_e \times p^2 LC}{pRC + p^2 LC + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (3.4.8)$$

Dans le cas du filtre passe-haut du 2nd ordre, la fréquence de coupure est identique à celle du filtre passe-bas :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.4.9)$$

Il en est de même pour le facteur de qualité  $Q$  du filtre qui est défini par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (3.4.10)$$

### Filtre passe-bande et coupe-bande du 2nd ordre

Les filtres passe-bande et coupe-bande du second ordre sont obtenus à partir de circuits RLC où la tension de sortie est prise soit sur la résistance, soit sur l'ensemble composé de l'inductance et la capacité.

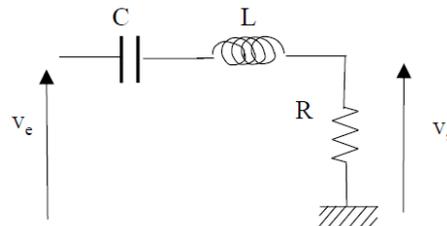


FIGURE 3.4.5 – Schéma d'un filtre passe-bande du second ordre avec des éléments RLC.

Comme le montre la figure 3.4.5, le filtre passe-bande correspond à une tension de sortie au niveau de la résistance. La fonction de transfert s'obtient facilement en considérant le diviseur de tension entre  $V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times R}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{V_e \times pRC}{pRC + p^2LC + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{\frac{p}{Q\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.4.11)$$

Dans le cas du filtre passe-bande du 2nd ordre, la fréquence de résonance est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (3.4.12)$$

et le facteur de qualité  $Q$  du filtre qui est défini par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (3.4.13)$$

Dans le cas du filtre coupe-bande du second ordre, la tension de sortie est prise aux bornes de l'ensemble inductance + capacité, comme indiqué sur la figure 3.4.6. Dans ce cas, la fonction de

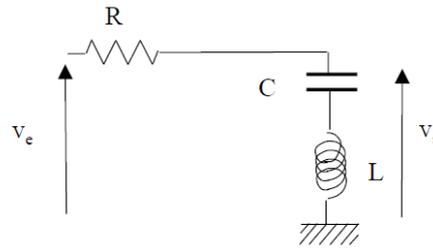


FIGURE 3.4.6 – Schéma d'un filtre coupe-bande du second ordre avec des éléments RLC.

transfert s'obtient en considérant le diviseur de tension entre  $V_e$  et  $V_s$  selon l'équation :

$$V_s = \frac{V_e \times (pL + \frac{1}{pC})}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{V_e \times (1 + p^2LC)}{pRC + p^2LC + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.4.14)$$

Dans le cas du filtre coupe-bande du 2nd ordre, la fréquence de résonance est identique à celle du filtre passe-bas :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (3.4.15)$$

ainsi que le facteur de qualité  $Q$  du filtre qui reste défini par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (3.4.16)$$

