1.2 Séance de TD sur les systèmes de convolution

Questions de cours

1/ Quel est l'intérêt des fonctions $e^{2i\pi\nu t}$ pour l'analyse des systèmes de convolution ?

2/ Soit h la réponse impulsionnelle d'un système de convolution. Quelle est la propriété vérifiée par h quand le système est causal ?

Exercice 1. Système de convolution

On considère un système dont la relation entre l'entrée et la sortie est décrite par une convolution. Plus précisément, si $e(t)$ est un signal appliqué à l'entrée du système, la sortie $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e(\tau)d\tau$$

1/ Ce système est-il linéaire ? Que représente $h(t)$?

2/ Ce système est-il stationnaire ?

On suppose que $h(t) = \theta(t-u)\exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)$, où α et u sont des réels, où α est positif et où $\theta(t)$ est l'échelon d'Heaviside.

3/ Enoncez une condition sur u pour que ce système soit causal.

4/ Calculez la fonction de transfert du système.

Exercice 2. Relation d'incertitude

Soit $x(t)$ un signal d'énergie finie avec $E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$ et dont la transformée de Fourier $X(\nu)$ existe. La relation d'incertitude est donnée par :

$$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

avec

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{E_x}\int_{\mathbb{R}}(t-\mu_t)^2|x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \sigma_\nu^2 = \frac{1}{E_x}\int_{\mathbb{R}}(\nu-\mu_\nu)^2|X(\nu)|^2 d\nu$$

et

$$\mu_t = \frac{1}{E_x}\int_{\mathbb{R}} t|x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \mu_\nu = \frac{1}{E_x}\int_{\mathbb{R}} \nu|X(\nu)|^2 d\nu$$

1/ Si on interprète $\frac{1}{E_x}|x(t)|^2$ comme une densité de probabilité, quelle interprétation physique peut-on donner à μ_t et σ_t ? Idem pour μ_ν et σ_ν ? Finalement, quelle est la conséquence de la relation d'incertitude ?

2/ Que devient cette relation pour le signal $x(t) = e^{-\pi\alpha(t-t_0)^2} e^{2\pi i\nu_0(t-t_0)}$?

3/ On suppose que le signal $x(t)$ est normé et centré au sens où $E_x = 1$ et $\int t|x(t)|^2\, dt = \int \nu|X(\nu)|^2\, d\nu = 0$. En utilisant les signaux : $u(t) = tx(t)$ et $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ montrez que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de démontrer la relation d'incertitude. En déduire une condition nécessaire pour avoir égalité.