1.4 Séance de TD sur l'échantillonnage

Questions de cours

1/ Enoncez le théorème d'échantillonnage.

2/ Comment éviter le phénomène de repliement spectral ?

Exercice 1. Repliement spectral

1/ On considère un signal sinusoïdal à la fréquence 1 kHz échantillonné à 10kHz. La figure 7.a représente le signal échantillonné x_n. La figure 7.b représente le module de la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné x_n entre -10 kHz et 25 kHz. Observez et commentez.

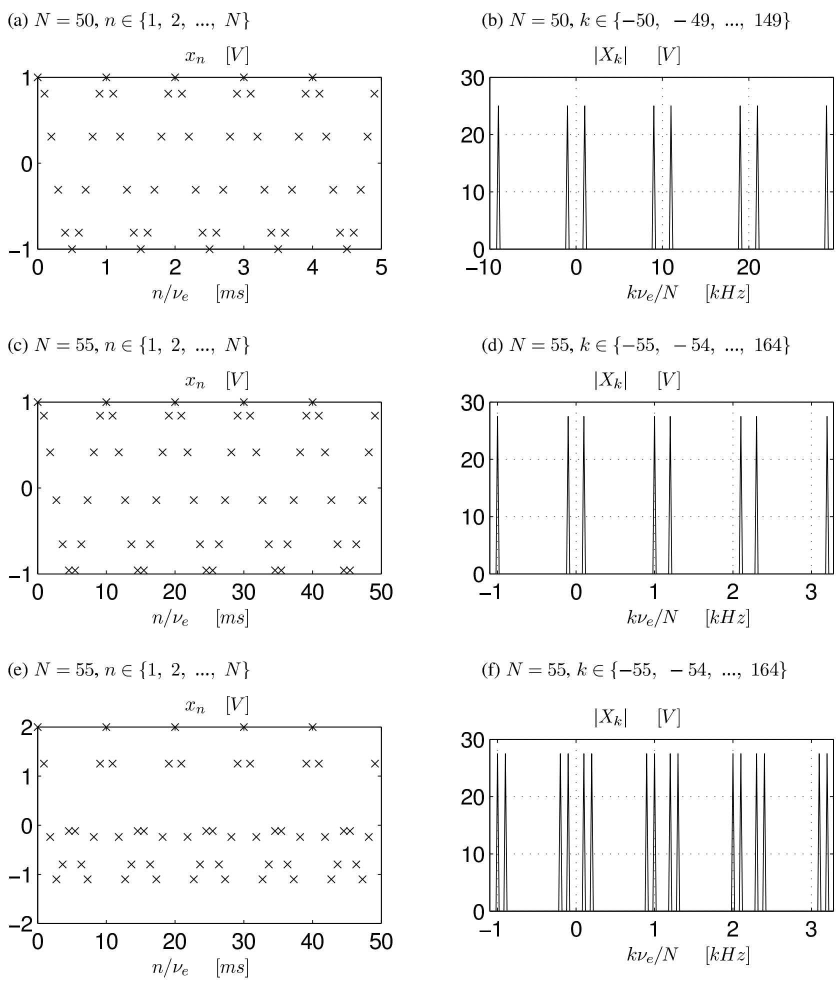


FIGURE 7 – Figure 1 : Echantillonnage et repliement spectral.

2/ On considère toujours un signal sinusoïdal à la fréquence 1 kHz mais échantillonné maintenant à 1.1 kHz (cf. figure 7.c et 7.d). Quel phénomène observez-vous ? A quoi est-il dû ?

3/ A quoi ressemblerait le module de la transformée de Fourier discrète d'une sinusoïde de fréquence 100 Hz échantillonnée à 1.1 kHz ?

4/ On échantillonne à 1.1 kHz un signal qui correspond à la somme de deux sinusoïdes, l'une possède une fréquence de 1kHz et l'autre de 200 Hz. Vous pourrez analyser ce cas figure 7.e et 7.f. Dessinez le module de la transformée de Fourier discrète que vous auriez obtenu si vous aviez utilisé un filtre anti-repliement avant d'échantillonner à 1.1 kHz.

Exercice 2. Modulation

On considère un signal $s(t)$ dont la transformée de Fourier $S(\nu)$ est nulle pour les fréquences négatives. Ainsi on a $S(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$.

1/ On suppose aussi que $S(\nu) = 0$ si $\nu > 10MHz$. A quelle fréquence doit-on échantillonner le signal $s(t)$?

2/ Supposons de plus maintenant que $S(\nu) = 0$ si $\nu < 8MHz$ et $\nu > 10MHz$. A quelle fréquence doit-on échantillonner le signal $s(t)$?

3/ On suppose à présent que l'on échantillonne le signal défini par $x(t) = s(t) \exp(-i2\pi\nu_0 t)$. Montrez que sous certaines conditions qu'il conviendra de préciser, il est possible d'échantillonner le signal $x(t)$ sans perte d'information avec une fréquence d'échantillonnage plus faible que celle obtenue au 1/.

4/ Quelle valeur de ν_0 faut-il choisir pour pouvoir échantillonner le signal $x(t)$ défini avec la fréquence d'échantillonnage la plus faible ?

Exercice 3. Effets de Gibbs

On mesure un signal $x(t)$ sur une durée finie (entre $-T/2$ et $T/2$). Tout se passe comme si on mesurait $x_1(t) = x(t)\ w_1(t)$ où

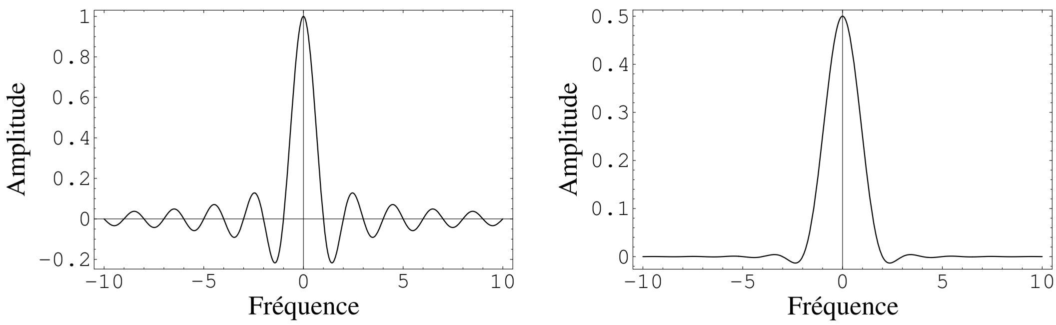
$$w_1(t) = \mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2 \end{cases}$$

1/ Calculez la transformée de Fourier de $w_1(t)$.

2/ On considère à présent une nouvelle fenêtre $w_2(t)$ définie par

$$w_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos[2\pi \frac{t}{T}]) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T/2 \end{cases}$$

On suppose $T = 1s$. Parmi les deux figures 8.a et 8.b laquelle représente la partie réelle de la transformée de Fourier de $w_1(t)$ et laquelle représente la partie réelle de la transformée de Fourier de $w_2(t)$?



(a) (b)

FIGURE 8 – Partie réelle de la transformée de Fourier des deux fenêtres w_1 et w_2.

3/ On suppose que $x(t)$ est la somme de deux sinusoïdes complexes ($e^{i2\pi\nu_1 t}$ et $e^{i2\pi\nu_2 t}$) de fréquences 1 Hz et 5,5 Hz. Tracez l'allure des modules des transformées de Fourier de $x_1(t) = x(t)\ w_1(t)$ et de $x_2(t) = x(t)\ w_2(t)$.

4/ Quel peut être l'intérêt d'analyser $x_2(t)$ par rapport à $x_1(t)$?