1.6 Séance de TP sur l'analyse spectrale

Pour tout signal $x(t)$ mesuré entre $t = -T/2$ et $t = +T/2$, on peut écrire :

$$x_T(t) = x(t)\mathrm{rect}_T(t) \quad \text{où } \mathrm{rect}_T(t) = 1 \text{ pour } |t| < T/2 \text{ et } 0 \text{ sinon.} \tag{23}$$

ce qui devient en fréquence :

$$X_T(\nu) = X(\nu) \star (T\mathrm{sinc}(\pi T\nu)) \tag{24}$$

où $X_T(\nu)$ est la transformée de Fourier de $x_T(t)$ et $\star$ le produit de convolution.

En effet

$$TF(\mathrm{rect}_T(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2i\pi\nu t} dt$$

ce qui devient

$$TF(\mathrm{rect}_T(t)) = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

et

$$TF(\mathrm{rect}_T(t)) = T\mathrm{sinc}(\pi T\nu)$$

Exemple.

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$$

On a

$$X_T(\nu) = \frac{T}{2}\left(\mathrm{sinc}(\pi T(\nu - \nu_0)) + \mathrm{sinc}(\pi T(\nu + \nu_0))\right)$$

Au lieu d'avoir deux pics parfaits (des Diracs), on a deux sinus cardinaux. Cet artefact, appelé effet de Gibbs, est dû à la nature finie de la durée d'acquisition.

Ainsi, l'analyse du spectre d'un signal mesuré sur une durée finie T peut générer des **effets de Gibbs**. Pour atténuer ces effets de Gibbs, on peut utiliser une **fenêtre de pondération** $F(t)$.

$$x_F(t) = F(t)x_T(t) = F(t)\mathrm{rect}_T(t)x(t) \tag{25}$$

Pour la fenêtre "rectangle", $F(t) = 1$, mais il existe d'autres types de fenêtre notamment :

fenêtre de Hanning	fenêtre de Hamming	fenêtre de Blackman
$F(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{T}\right)$	$F(t) = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi t}{T}$	$F(t) = 0.42 + 0.5\cos\frac{2\pi t}{T} + 0.08\cos\frac{4\pi t}{T}$

On peut noter que ces fenêtres commencent et terminent par 0 avec une dérivée proche de 0. Une interprétation possible est que ces fenêtres atténuent les discontinuités sur les bords.

Analyse spectrale avec 2 sinusoïdes plus un bruit

On simule l'expérience qui consiste à échantillonner sur une durée finie T la somme de deux sinusoïdes, plus un bruit blanc gaussien :

$$x(t) = A_1\cos(2\pi\nu_1 t + \phi_1) + A_2\cos(2\pi\nu_2 t + \phi_2) + b(t)$$

Récupérez le fichier `TP_analyse_spectrale` et lancez le programme `main.m`.

1/ Dans un premier temps $A_2 = 0$. Faites varier ν_1 en modifiant le programme `main.m` ligne 16 et observez le phénomène de repliement spectral. Appeler l'encadrant pour valider vos observations.

2/ Ligne 16, choisissez $\nu_1 = 950$ Hz, et ligne 19 $A_2 = 1$ V. Ensuite faites varier la fréquence de la deuxième sinusoïde. En conserver une durée d'acquisition $T = 10$ ms, quel est l'écart en fréquence à partir duquel vous n'arrivez plus à lire les fréquences des deux sinusoïdes sur le spectre ? Quelle est l'influence du zero-padding (ligne 26) ? Quelle est l'influence de la fenêtre de pondération (ligne 30) ? Justifiez votre réponse en définissant clairement le critère utilisé. Appeler l'encadrant pour valider vos observations.

3/ Même question lorsque l'une des sinusoïdes possède une amplitude 100 fois plus grande que l'autre. Justifiez votre réponse en définissant clairement le critère utilisé. Appeler l'encadrant pour valider vos observations.