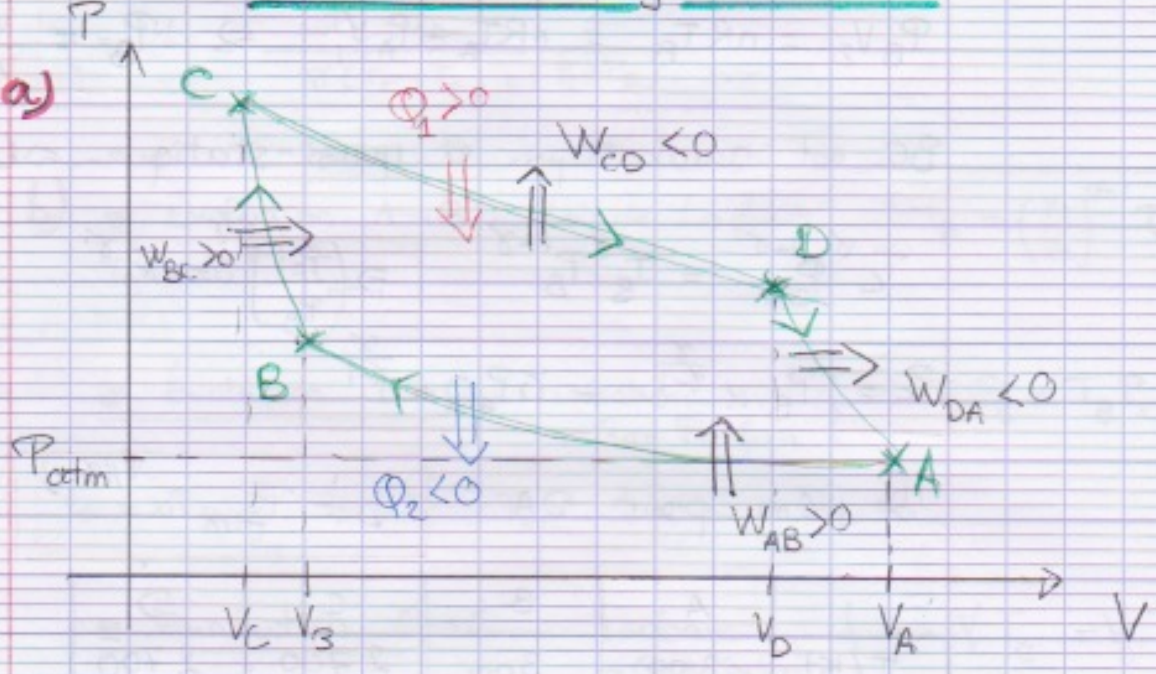
TD 7 thermo : Machines Thermiques 2

Exercice 1

1. Utilisation du cycle de Carnot

a)



AB : Isotherme à $T_f = T_{Atm}$

BC : Adiabatique

CD : Isotherme à $T_c = T_{max}$

DA : Adiabatique

---

b) $\Delta U = W_{tot} + Q_1 + Q_2 = 0$ (cycle)

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Le cycle de Carnot est réversible donc l'inégalité de Clausius - Carnot est une égalité :

$$\frac{Q_1}{T_{max}} + \frac{Q_2}{T_{Atm}} = 0$$

d'où $\boxed{\eta = 1 - \frac{T_{atm}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{\alpha}}$

c) $\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{9} = 89\%}$

d) AB isotherme donc $T_A = T_B = T_{Atm}$
CD isotherme donc $T_C = T_D = T_{max}$

$P_B V_2 = nRT_B = nRT_A = P_A V_1 \Rightarrow \boxed{P_B = \frac{V_1}{V_2} P_A = \tau P_{Atm}}$

BC est adiabatique et quasi-statique $\Rightarrow$ Loi de Laplace

$T_C^{\gamma} P_C^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma} \Rightarrow \left(\frac{P_C}{P_B}\right)^{1-\gamma} = \alpha^{-\gamma}$

$\boxed{P_C = P_B \, \alpha^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \tau P_{Atm} \, \alpha^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$

De même pour DA : $\boxed{P_D = P_{Atm} \, \alpha^{\gamma/(\gamma-1)}}$

	A	B	C	D
T(K)	300	300	2700	2700
P(bar)	1	10	21 870	2187

e) On voit que la pression en C est beaucoup trop importante !
En pratique, on ne peut pas réaliser un tel cycle

2. Amélioration du cycle de Carnot

a) ▪ Calcul de aQ_1 :
$B \to C$: isochore donc $\Delta U = aQ_1$ et $\Delta U = C_V \Delta T$

$\boxed{aQ_1 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)}$

▪ Calcul de bQ_2 :
$C \to C'$ est isobare donc $C_P \Delta T = bQ_1$

$\boxed{bQ_1 = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_{C'} - T_C)}$

Calcul de Q_2 :

$D \to A$: iso chore $\longrightarrow$ $\boxed{Q_2 = \frac{-nR}{\gamma-1}(T_D - T_A)}$

$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma(T_{C'} - T_C) + (T_C - T_B)}}$$

b) Évolution $A \to B$: Loi de Laplace $T_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_A$

$\boxed{T_B = \tau^{\gamma-1} T_{Atm}}$

Évolution $B \to C$: isochore + Gaz Parfait $\Big\} \Rightarrow T_C P_B = T_B P_C$

$\boxed{T_C = T_B \frac{P_C}{P_B} = \tau^{\gamma-1} T_{Atm} \cdot \alpha}$

Évolution $C \to C'$: isobare + Gaz Parfait $\Big\} \Rightarrow V_C T_{C'} = V_{C'} T_C$

$\boxed{T_{C'} = \frac{V_{C'}}{V_C} T_C = \Delta T_C = \Delta \alpha \tau^{\gamma-1} T_{Atm}}$

Évolution $C' \to D$: Adiabatique Reversible

$T_D V_D^{\gamma-1} = T_{C'} V_{C'}^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_{C'} \cdot \left(\frac{\Delta V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$

$\boxed{T_D = \Delta \alpha \tau^{\gamma-1} T_{Atm} \cdot \Delta^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma-1} = \Delta^{\gamma} \alpha T_{Atm}}$

c) $\eta = 1 - \frac{\Delta^{\gamma} \alpha T_{Atm} - T_{Atm}}{\gamma \Delta \alpha \tau^{\gamma-1} T_{Atm} - \tau^{\gamma-1} T_{Atm} - (\gamma-1)\tau^{\gamma-1} T_{Atm} \alpha}$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\alpha \Delta^{\gamma} - 1}{\tau^{\gamma-1}(\gamma \Delta \alpha - 1 - (\gamma-1)\alpha)}}$$

d) Ici $T_{max} = T_{C'}$ (car $\Delta > 1$ et $\lambda > 1$)

$$\frac{T_{C'}}{T_A} = \frac{T_{max}}{T_{Atm}} = \alpha \Rightarrow \boxed{\Delta \lambda \tau^{\gamma-1} = \alpha \quad (1)}$$

$$a = b = 0,5 \Rightarrow a\Phi_1 = b\Phi_1 \Rightarrow T_C - T_B = \gamma(T_{C'} - T_C)$$
$$\Rightarrow \lambda \tau^{\gamma-1} - \tau^{\gamma-1} = \gamma(\Delta\lambda\tau^{\gamma-1} - \lambda\tau^{\gamma-1})$$
$$\Rightarrow \lambda - 1 = \gamma\Delta\lambda - \gamma\lambda$$
$$\Rightarrow \boxed{(1+\gamma)\lambda = \gamma\Delta\lambda + 1 \quad (2)}$$

(1) et (2) : $\boxed{\lambda = \dfrac{\gamma\alpha\tau^{1-\gamma} + 1}{1+\gamma}}$ AN: $\lambda = 2,5$

$\Delta = 1,4$

$\eta = 0,59$

---

e)

$P_B = \tau^\gamma P_{Atm}$

$P_C = \lambda\tau^\gamma P_{Atm}$

$P_D = \Delta\gamma\lambda P_{atm}$

	A	B	C	C'	D
T(K)	300	754	1885	2696	1238
P(bar	1	25,1	62,8	62,8	4,12

---

f) Inconvénients : • Rendement plus faible

• Travail fournit par cycle plus faible

↳ Puissance plus faible

Avantages : • Pression maximale = 63 bar donc c'est réalisable techniquement.

ECPk	**TD (7)**	**Exercice 2**	***corrigé***

1. $\boxed{V = 150m^3}$; $\boxed{m = \dfrac{P_o VM}{RT_o} = \dfrac{P_o V}{rT_o} = \dfrac{10^5.150.29.10^{-3}}{8,31.298} = 176kg}$.

2. $\boxed{C = \dfrac{nR}{\gamma-1} = \dfrac{mr}{\gamma-1} \underset{cf.1.1.}{=} \dfrac{P_o V}{\gamma T_o}\dfrac{\gamma}{\gamma-1} = \dfrac{10^5.150}{298.(1,4-1)} = 126kJ.K^{-1}}$

3. $\boxed{U(T) = CT = \dfrac{mr}{\gamma-1}T}$ *Application numérique :* $\boxed{U(T=298K) = 37,5MJ}$ 37,6 MJ

4. $dU = TdS - pdV$ donc $dS = \dfrac{dU}{T} + \dfrac{P}{T}dV = \dfrac{mr}{\gamma-1}\dfrac{dT}{T} + nR\dfrac{dV}{V} = d\left(\dfrac{mr}{\gamma-1}\ln T + mr\ln V\right)$.

Finalement, $\boxed{S(T,V) - S(T_i,V_i) = \dfrac{mr}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T}{T_i}\right) + mr\ln\left(\dfrac{V}{V_i}\right)}$.

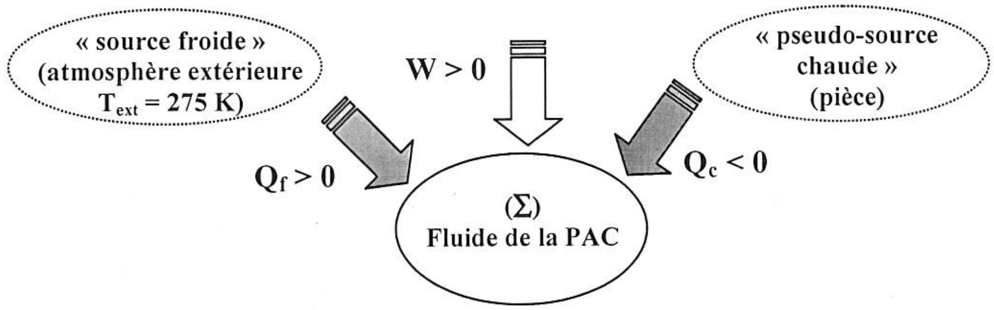
A.N. : $\boxed{S(T_o,V_i) - S(T_i,V_i) = \dfrac{mr}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T_o}{T_i}\right) \underset{cf.1.1.}{=} \dfrac{P_o V}{\gamma T_o}\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\dfrac{T_o}{T_i}\right) = \dfrac{10^5.150}{298}\dfrac{1}{1,4-1}\ln\left(\dfrac{298}{275}\right) = 10,1kJ.K^{-1} > 0}$

Une augmentation de l'entropie d'un système est interprétée à l'échelle microscopique comme une augmentation de l'information manquante (c'est-à-dire du désordre) : cf. complément *Interprétation statistique de l'entropie* dans le §5. A volume constant, une augmentation de la température mène à une augmentation du désordre ce que traduit l'augmentation de l'entropie.

5. Au cours d'un cycle, $\Delta S \triangleq S_F - S_I \underset{I=F}{=} 0$ que le cycle soit décrit ou non de manière réversible.

En revanche, **si le cycle est décrit de manière réversible,** alors $S_{créée} = 0$ donc $S_{échangée} = \underbrace{\Delta S}_{=0\,(cycle)} - S_{créée} = 0$; tandis que **si le cycle est décrit de manière irréversible,** alors $S_{créée} > 0$ donc $S_{échangée} = \underbrace{\Delta S}_{=0(cycle)} - S_{créée} = -S_{créée} < 0$.

6.



Le fluide de la PAC reçoit effectivement du travail, ce qui lui permet de recevoir effectivement de la chaleur de la source froide pour en céder effectivement à la pseudo-source chaude. On parle de pseudo-source plutôt que de source car la température de cette source est susceptible de varier. La pseudo-source a une capacité thermique finie tandis que la source a une capacité thermique infinie

7. Le premier principe appliqué à Σ au cours d'un cycle s'écrit $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$ (1);

Le second principe appliqué à Σ au cours d'un cycle s'écrit $\Delta S = 0 = S_{échangée} + S_{créée} = \left(\dfrac{Q_f}{T_{ext}} + \dfrac{Q_c}{T_{pièce}}\right) + \underbrace{S_{créée}}_{\substack{=0 \\ car\ réversible}}$ (2) ;

$$e \triangleq \left|\frac{grandeur\ valorisable}{grandeur\ couteuse}\right| = -\frac{Q_c}{W} \underset{cf.(1)}{=} \frac{Q_c}{Q_f + Q_c} = \frac{1}{1 + Q_f/Q_c} \underset{cf.(2)}{=} \frac{1}{1 - T_{ext}/T_{pièce}}$$

A.N. $\boxed{e = \dfrac{1}{1 - T_{ext}/T_{pièce}} = \dfrac{1}{1 - 275/298} = 13}$

8.

8.a. Le premier principe appliqué au gaz contenu dans la pièce au cours d'un cycle du fluide de la PAC de durée dt s'écrit $\underbrace{dU_{pièce}}_{CdT_p(t)} = \underbrace{\delta Q_{PAC\to pièce}}_{=-\delta Q_{pièce\to PAC}}$ d'où $\boxed{-\delta Q_{pièce\to PAC} = CdT_p}$.

8.b. Le premier principe appliqué au fluide de la PAC au cours d'un cycle de durée dt s'écrit : $\underbrace{dU_{PAC}}_{=0(cycle)} = \underbrace{\delta W}_{=P_u dt} + \underbrace{\delta Q_{pièce\to PAC}}_{=-CdT_p} + \delta Q_{atmosphère\to PAC}$ d'où $\boxed{\delta Q_{atmosphère\to PAC} = -P_u dt + CdT_p}$.

8.c. $\delta S_{échangée} \triangleq \dfrac{\delta Q_{pièce\to PAC}}{T_P(t)} + \dfrac{\delta Q_{atmosphère\to PAC}}{T_{ext}}$ soit $\boxed{\delta S_{échangée} = -\dfrac{CdT_P}{T_P} + \dfrac{CdT_P - P_u dt}{T_{ext}}}$.

8.d. Au cours d'un microcycle, $\underbrace{dS}_{=0(cycle)} = \delta S_{échangée} + \underbrace{\delta S_{créée}}_{=0(réversible)}$ d'où $\boxed{dT_P\left(\dfrac{1}{T_{ext}} - \dfrac{1}{T_P}\right) = \dfrac{P_u dt}{CT_{ext}}}$.

8.e. On intègre cette dernière équation $\dfrac{dT_P^*}{T_{ext}} - d\left(\ln T_P^*\right) = \dfrac{P_u dt^*}{CT_{ext}}$ entre les états $\left(T_P^* = T_{ext}; t^* = 0\right)$ et $\left(T_P^* = T_f; t^* = \Delta t\right)$:

$$\int_{T_P^*=T_{ext}}^{T_P^*=T_f} \frac{dT_P^*}{T_{ext}} - \int_{T_P^*=T_{ext}}^{T_P^*=T_f} d\left(\ln T_P^*\right) = \frac{P_u}{CT_{ext}} \int_{t^*=0}^{t^*=\Delta t} dt^* \text{ soit } \frac{T_f - T_{ext}}{T_{ext}} - \ln\left(\frac{T_f}{T_{ext}}\right) = \frac{P_u \Delta t}{CT_{ext}} \text{ avec } \boxed{\Delta t = \frac{CT_{ext}}{P_u}\left[\frac{T_f}{T_{ext}} - 1 - \ln\left(\frac{T_f}{T_{ext}}\right)\right]}.$$

A.N. : $\boxed{\Delta t = \dfrac{125839 \times 275}{500}\left[\dfrac{298}{275} - 1 - \ln\left(\dfrac{298}{275}\right)\right] = \underset{230}{229s} = 3\min 49s}$

La machine (idéale !...) est très performante ! En pratique, les sources d'irréversibilité ne permettent certainement pas d'obtenir une telle efficacité.

9.

On utilise les résultats de la question **8. mais dans cette question** $\delta S_{créée} \neq 0$.

- Au cours d'un microcycle, $\underbrace{dS}_{=0(cycle)} = \delta S_{échangée} + \delta S_{créée}$ d'où $\delta S_{créée} = \dfrac{CdT_P}{T_P} + \dfrac{P_u dt - CdT_P}{T_{ext}}$.

- On intègre cette dernière équation entre les états $\left(T_P^* = T_{ext}; t^* = 0\right)$ et $\left(T_P^* = T_f; t^* = \Delta t'\right)$ pour obtenir :

$$\boxed{S^{c} = C\ln\left(\frac{T_f}{T_{ext}}\right) + \frac{P_u \Delta t'}{T_{ext}} - C\frac{T_f - T_{ext}}{T_{ext}}}$$

- Remarquons que $S^{c} = \dfrac{P_u}{T_{ext}}\left[\Delta t' + \dfrac{CT_{ext}}{P_u}\left(\ln\left(\dfrac{T_f}{T_{ext}}\right) + 1 - \dfrac{T_f}{T_{ext}}\right)\right]$ soit $\boxed{S^{c} = \dfrac{P_u}{T_{ext}}\left[\Delta t' - \Delta t\right]}$.

- Ainsi $\Delta t' = \Delta t + \underbrace{\dfrac{T_{ext}}{P_u} S^P}_{>0}$. Comme $S^{c} > 0$, on obtient $\Delta t' > \Delta t$: le caractère irréversible du cycle augmente la durée de fonctionnement de la machine pour réaliser la consigne.