TD 3 - Vibration des structures

Méthode de Rayleigh- Ritz
Méthode des éléments finis

Exercice 1

<u>Objectif</u> : Obtention des équations caractéristiques donnant les fréquences de résonance en fonction des conditions aux limites. Mise en œuvre de la procédure de Rayleigh-Ritz.

On considère la poutre console, montrée en Figure 1, supportant une masse ponctuelle M. On décrit son comportement mécanique à l'aide du modèle de flexion d'Euler Bernoulli.

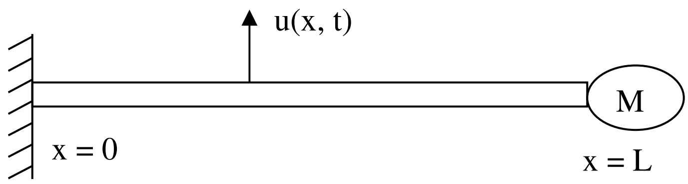

Figure 1

EI : Rigidité en flexion
L : longueur de la poutre
ρS : masse par unité de longueur
S : aire des sections droites

1 – Déduire à partir du principe d'Hamilton l'équation d'équilibre de la poutre et ses conditions aux limites.

2 – En utilisant le paramètre sans dimension $\mu = \dfrac{M}{\rho S l}$, établir le système d'équations associé au calcul des fréquences propres du système mécanique étudié. Montrer que les fréquences élevées tendent vers les fréquences de résonance d'une poutre simplement supportée en x = L qui correspond au cas limite $M \rightarrow \infty$ (optionnel).

3 – Expliciter les équations aux fréquences propres dans le cas $\mu = 0$ et $\mu = \infty$. A partir d'une analyse graphique, trouver un encadrement des fréquences de résonance (optionnel).

4 – Dans le cas $\mu = 0$, estimer les deux premières fréquences de résonance en utilisant, après l'avoir justifié, le schéma de Ritz suivant :

$$u = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^3$$

Comparer les résultats avec ceux obtenus dans l'exercice 1 du TD n° 5. Discuter.

5 – Dans le cas $\mu = \infty$, estimer la première fréquence de résonance à l'aide de la méthode de Rayleigh Ritz en prenant une seule déformée cinématiquement compatible.

6 – Montrer que le modèle de Rayleigh Ritz de la question 4 permet d'estimer la première fréquence de résonance en imposant une liaison cinématique. Discuter.

Exercice 2

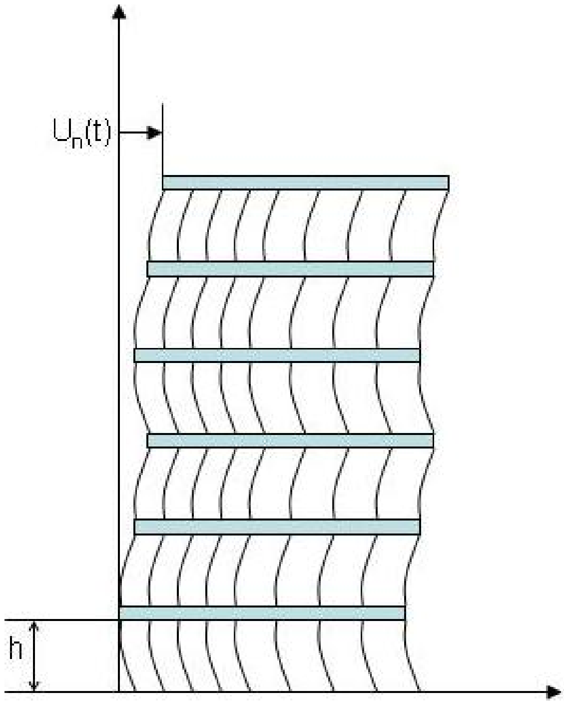

Fig2 : structure discrète du bâtiment

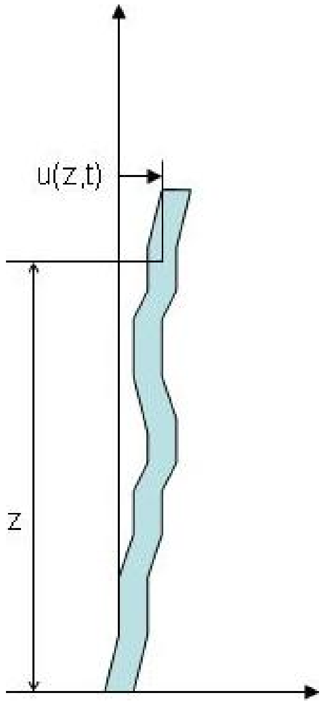

Fig3 : structure poutre équivalente

On considère un bâtiment constitué d'un portique parfaitement régulier comprenant N planchers et L poteaux entre deux planchers (fig.2).

On suppose que la base est encastrée et que les planchers « solides indéformables » restent parallèles à la base. Ces hypothèses permettent de dire que le $n^{ième}$ plancher a un mouvement $U_n(t)$ dans un plan horizontal.
On admet que toute la masse du bâtiment est concentrée au niveau des planchers.
On désigne par m la masse d'un plancher et par M = N*m la masse du bâtiment.
On suppose que les poteaux travaillent en flexion pure. On désigne par EI leur rigidité en flexion et par h leur hauteur. La rigidité à la flexion d'un poteau entre deux étages est alors données par :

$$k = \frac{12\,EI}{h^3}$$

1 – Equations discrètes du mouvement
Justifier les équations d'équilibre des planchers :

$$m\ddot{U}_n = L\,k\,(U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1})$$

Mettre sous forme matricielle le système d'équations aux $U_n(t)$ en tenant compte des conditions aux limites.

2 – Problème homogénéisé
Pour la résolution on admet que le nombre d'étages est suffisamment grand pour passer des variables discrètes $U_n(t)$ à une variable continue *u(z,t)* telle que

$U_n(t)$ = *u(nh,t)*

Donner la forme homogénéisée de l'équation récurrente de la première question.

On considère maintenant la poutre en cisaillement (fig.2) équivalente au bâtiment. La longueur de cette poutre est telle que L=Nh= hauteur du bâtiment.
On ne considère que les effets de cisaillement dus à l'effort tranchant

$$T = -GSu'(z,t)$$

Il s'agit d'un modèle de poutre en cisaillement.
En isolant un tronçon de poutre, déterminer l'équation locale du mouvement.
Préciser les conditions aux limites.

En comparant les deux équations aux dérivées partielles, donner l'expression équivalente du module de cisaillement GS et de la masse par unité de longueur ρS du bâtiment.

3 – Approche variationnelle
Exprimer les différentes formes d'énergie associées au modèle homogénéisé de la poutre en cisaillement (énergie cinétique, énergie potentielle, travail des actions mécaniques extérieures).
A utilisant ces expressions dans le principe de Hamilton, retrouver les équations du problème homogénéisé.

4 – Modes de vibration continus
A l'aide de l'équation homogénéisée donner la forme et les fréquences de résonance des modes du bâtiment.

5 – Méthode de Rayleigh-Ritz
Après avoir justifié le schéma de discrétisation suivant :

$$u(z,t) = \lambda_1\left(\frac{z}{Nh}\right) + \lambda_2\left(\frac{z}{Nh}\right)^2$$

donner une estimation des deux premières fréquences de résonance.
Comparer la forme propre approchée du premier mode avec celle obtenue précédemment.

6 – Méthode des éléments finis
On découpe le bâtiment en deux éléments finis comme le montre la figure 4.
Construire la matrice de masse et de raideur de l'élément montré en figure 5 en utilisant une interpolation linéaire entre les nœuds 1 et 2
Assembler les deux éléments finis afin d'avoir un modèle dynamique du bâtiment.
En déduire une estimation des deux premières fréquences de résonance.

7 – Calcul de la réponse à une secousse sismique
On impose à la base du bâtiment un mouvement $\alpha(t)$.
Donner l'équation du mouvement du bâtiment à l'aide du modèle de « Rayleigh-Ritz » puis du modèle « éléments finis ».

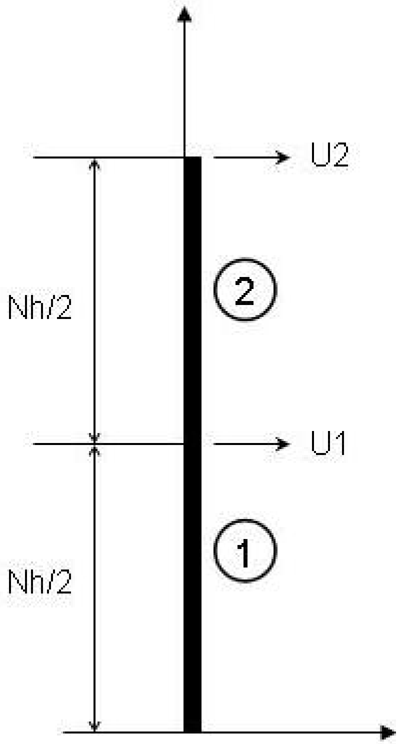

Fig4 : discrétisation éléments finis de la structure

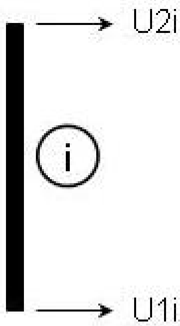

Fig5 : élément fini de poutre