Ci-dessous, plutôt qu'une correction détaillée, on ne livre que quelques indices.

Exercice 1. Système de convolution

1/ oui, puisqu'il s'agit d'un système de convolution. h est la réponse impulsionnelle.
2/ oui, puisqu'il s'agit d'un système de convolution.
3/ h est causal si et seulement si $u \geq 0$.
4/

$$H(\nu) = \frac{e^{-u/\alpha - 2i\pi\nu u}}{\frac{1}{\alpha} + 2i\pi\nu} = \frac{\alpha e^{-u/\alpha - 2i\pi\nu u}}{1 + 2i\pi\nu\alpha}$$

Exercice 2. Relation d'incertitude

1/ Pas de difficultés particulières.
2/ L'inégalité devient une égalité. Pour le montrer, le plus rapide est de le déduire de la réponse à la question 3.
3/ Avec Cauchy-Schwarz

$$\left| \int u^*(t)v(t)dt \right| \leq \left(\int |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} . \left(\int |v(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Soit $u(t) = tx(t)$ et $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, on a

$$\int |u(t)|^2 \, dt = \int t^2 |x(t)|^2 \, dt = \sigma_t^2$$

et

$$\int |v(t)|^2 \, dt = \int \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^* \frac{dx(t)}{dt} dt$$

Or, en utilisant Parseval, l'équation devient :

$$\int |v(t)|^2 \, dt = \int (2i\pi)^* (2i\pi) \nu^2 |x(\nu)|^2 d\nu$$

ce qui est égal à :

$$\int |v(t)|^2 \, dt = 4\pi^2 \int \nu^2 |x(\nu)|^2 d\nu = 4\pi^2 \sigma_\nu^2.$$

Enfin, en faisant une intégration par partie, $u(t) = tx^*(t)$ et $v'(t) = dx/dt$, on obtient que :

$$\int t \; x^*(t) \frac{dx}{dt} \, dt = \left[t \; |x(t)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int |x(t)|^2 dt - \int t \; x(t) \frac{dx^*}{dt} \, dt$$

En supposant que $\left[t \; |x(t)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car sinon, le signal ne sera pas d'énergie finie, on obtient donc :

$$\mathrm{Re} \left(\int t \; x^*(t) \frac{dx}{dt} \, dt \right) = -1/2$$

Or comme

$$\left| \mathrm{Re} \left(\int t \; x^*(t) \frac{dx}{dt} \, dt \right) \right| \leq \left| \int t \; x^*(t) \frac{dx}{dt} \, dt \right| \leq \sigma_t \sigma_\nu 2\pi$$

On en déduit que

$$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

Pour que l'inégalité devienne une égalité, il faut que u et v sont proportionnels. En intégrant la relation de proportionnalité :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} zt \; x(t),$$

où z est un nombre complexe, ce calcul mène à :

$$x(t) = C \exp zt^2,$$

Donc à la question 2, on a égalité.