



G é o m é t r i e 2

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

20 avril 2020

Table des matières

1	Espaces vectoriels	1
1.1	Définitions - Premières propriétés	1
1.1.1	Définitions - Exemples	1
1.1.2	Premières propriétés	2
1.2	Sous-espaces vectoriels	3
1.2.1	Combinaisons linéaires et parties génératrices	4
1.2.2	Somme d'espaces vectoriels	5
1.3	Applications linéaires	6
1.3.1	Définitions et exemples	6
1.3.2	L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$	6
1.4	Sommes directes	7
1.5	Familles libres, familles génératrices, bases	9
1.5.1	Familles libres	9
1.5.2	Familles génératrices	10
1.5.3	Bases	11
2	Espaces vectoriels en dimension finie	13
2.1	Dimension d'un espace vectoriel	13
2.1.1	Espaces vectoriels de dimension finie	13
2.1.2	Dimension d'un espace vectoriel	13
2.1.3	Exemples	13
2.1.4	Caractérisation des bases en dimension finie	14
2.1.5	Théorème de la base incomplète	14
2.2	Sous-espaces vectoriels en dimension finie	14
2.2.1	Dimension d'un sous-espace vectoriel	14
2.2.2	Produits	15
2.2.3	Sommes	15
2.2.4	Rang d'une famille	16
2.3	Sous-espaces affines	16
2.3.1	Définitions et premières propriétés	16
2.3.2	Exemples	17
2.3.3	Espaces affines et géométrie	19

3	Polynômes à une indéterminée	20
3.1	Définitions	20
3.1.1	Polynômes à une indéterminée	20
3.1.2	Écriture d'un polynôme	21
3.1.3	Degré d'un polynôme	21
3.1.4	Fonctions polynomiales	22
3.1.5	Composition de polynômes	23
3.2	L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$	23
3.2.1	Familles échelonnées en degré	23
3.2.2	Polynômes interpolateurs de Legendre	24

Chapitre 1 Espaces vectoriels

Table des matières du chapitre

1.1	Définitions - Premières propriétés	1
1.1.1	Définitions - Exemples	1
1.1.2	Premières propriétés	2
1.2	Sous-espaces vectoriels	3
1.2.1	Combinaisons linéaires et parties génératrices	4
1.2.2	Somme d'espaces vectoriels	5
1.3	Applications linéaires	6
1.3.1	Définitions et exemples	6
1.3.2	L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$	6
1.4	Sommes directes	7
1.5	Familles libres, familles génératrices, bases	9
1.5.1	Familles libres	9
1.5.2	Familles génératrices	10
1.5.3	Bases	11

Dans cette partie on suppose que \mathbb{K} est un corps. Le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , mais on peut aussi avoir $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

1.1 DÉFINITIONS - PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1.1.1 Définitions - Exemples

DÉFINITION 1

Un triplet $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} ou un \mathbb{K} -espace vectoriel \域 \mathbb{K} 上的线性空间 / 向量空间\ si

1. E muni de la loi interne $(x, y) \mapsto x + y$, est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0 ou $\vec{0}$;
2. E est muni de la loi externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
 - (b) $\lambda(x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
 - (c) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.
 - (d) $1 \cdot x = x$.

Les éléments de E s'appellent vecteurs \向量\ et les éléments de \mathbb{K} les scalaires \标量\.

REMARQUE 2 —

1. Si E est un ensemble, une loi de composition interne est une application $E \times E \rightarrow E$. La loi \cdot est une application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, ce n'est pas une loi interne ; on dit que c'est une loi externe.
2. Comme pour les anneaux, on notera toujours les lois $+$ et \cdot et le plus souvent on oubliera même de mettre le point : $2 \cdot \vec{u} = 2\vec{u}$.
3. On écrira souvent E est un espace vectoriel sans préciser le corps \mathbb{K} quand il n'y a pas d'ambiguïté.

EXEMPLE 3 —

1. Un espace vectoriel n'est jamais vide, car il contient au moins $\vec{0}$. Et $E = \{\vec{0}\}$ est un espace vectoriel pour n'importe quel corps de scalaires \mathbb{K} . L'addition et la multiplication par un scalaire sont uniquement déterminés !

2. L'espace \mathbb{R}^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel où un vecteur \vec{u} est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés.

3. De la même manière, l'espace \mathbb{K}^2 est un \mathbb{K} -espace vectoriel où un vecteur \vec{u} est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.

4. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.

1.1.2 Premières propriétés

PROPOSITION 4

Dans un espace vectoriel, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$:

1. $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$.

Preuve — On a par exemple $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0}$ donc $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$. De plus, si $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \lambda \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} = \vec{0}$. □

DÉFINITION 5

Si A et B sont des parties de E , on pose :

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ \lambda \cdot A &= \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}, \\ \mathbb{K} \cdot a &= \{\lambda \cdot a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

EXEMPLE 6 — Dans \mathbb{K}^2 , on pose $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathbb{K}^2 = A + B$.

REMARQUE 7 — Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, alors c'est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel, mais ils n'ont pas les mêmes propriétés. Par exemple, $E = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i$. La "droite complexe" représente un plan en tant qu'espace vectoriel. Nous précisons ce phénomène dans la suite du cours.

Plus généralement, si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors si $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ est un sous-corps, E est aussi un \mathbb{K}' -espace vectoriel.

Par exemple \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel : $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1$. C'est donc un \mathbb{Q} -espace vectoriel, mais $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q} \cdot 1$.

EXEMPLE 8 — On verra que \mathbb{K}^n est un espace vectoriel de dimension n ... mais il existe aussi des espaces vectoriels de dimension infinie et ils sont très courants. Par exemple $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{K}$. On définit l'addition et la multiplication par un scalaire :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

REMARQUE 9 — Montrer qu'un triplet $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Comme dans le cas des groupes, des anneaux ou des corps, on va le plus souvent montrer que le triplet est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu : c'est le paragraphe suivant. mais avant cela, nous avons besoin de connaître des espaces de références. La proposition ci-dessous nous donne deux types très utiles.

PROPOSITION 10

1. Si X est un ensemble non vide quelconque et E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow E$. Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, les lois étant définies par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, f + g : t \mapsto f(t) + g(t), \lambda \cdot f : t \mapsto \lambda \cdot f(t).$$

2. Espace vectoriel produit \(\积空间\) : soit E_1, \dots, E_n des espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$, c'est-à-dire l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) avec $x_i \in E_i$, peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} en posant

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

DÉFINITION 11

On appelle E l'espace vectoriel produit des espaces vectoriels E_1, \dots, E_n .

EXEMPLE 12 —

1. On obtient une autre justification du fait que l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. C'est l'ensemble des fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{K} .
2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_n$.

1.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS

DÉFINITION 13

On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel \(\子空间\) si $F \neq \emptyset$ et si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F.$$

PROPOSITION 14

Si F est un sous-espace vectoriel du \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve — Vous pouvez faire la vérification sans problème. □

REMARQUE 15 — Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un sous-espace plus grand.

Espaces vectoriels de référence :

1. \mathbb{K}^n ;

2. $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, les applications de $I \subset \mathbb{K}$ dans \mathbb{K} .
3. $\mathcal{F}(X, E)$, où X est une partie non-vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

EXEMPLE 16 — *Prouver que les espaces suivants sont des espaces vectoriels :*

1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est presque nulle si tous les termes de la suite sont nuls à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ telle pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. On note $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des suites presque nulles de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{K} espace vectoriel où $k \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non vide, non réduit à un point de \mathbb{R} .

PROPOSITION 17

Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Preuve — Soit $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E . Alors $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$ et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. □

EXERCICE 18 —

1. Montrer que les ensembles

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et où I est un intervalle de \mathbb{R} sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?
 - les cercles d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-1)^2 + y^2 = 1$;
 - les droites d'équation $2x + 3y = 1$ et $2x + 3y = 0$.
3. L'ensemble S_0 des fonctions d'un intervalle I vers \mathbb{R} , deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle

$$4y'' + 2y' + 3y = 0 \tag{E_0}$$

est-il un espace vectoriel ? Même question pour l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle

$$4y'' + 2y' + 3y = 1 \tag{E}$$

1.2.1 Combinaisons linéaires et parties génératrices

Si A une partie de E , on montre ici que le plus petit espace vectoriel contenant A est l'intersection des espaces vectoriels contenant A et c'est encore l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A .

§ 1. Combinaisons linéaires

DÉFINITION 19

On dit que x est une combinaison linéaire \线性组合 de x_1, \dots, x_n s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

PROPOSITION 20

Une partie $F \subset E$ d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel ssi F est non vide et F est stable par combinaison linéaire \对线性组合是封闭的 : pour tous $x_1, \dots, x_n \in F$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F.$$

Preuve — \Leftarrow : une récurrence simple montre que si x_1, \dots, x_n appartiennent à un sous-espace vectoriel F , alors toute combinaison linéaire de ces éléments reste dans F .

\Rightarrow : immédiat. □

DÉFINITION 21

Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. On note l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1, \dots, x_n

$$\text{vect}(x_1, \dots, x_n) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}.$$

EXEMPLE 22 —

1. Dans \mathbb{R}^3 muni de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $e_1(0, 1, 2)$ et $e_2(0, 2, 3)$. Alors $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2 . On a $k = 2e_1 - e_2 \in \text{vect}(e_1, e_2)$ et $j = e_1 - 2k = -3e_1 + 2e_2 \in \text{vect}(e_1, e_2)$, donc $\text{vect}(j, k) \subset \text{vect}(e_1, e_2)$. Et réciproquement, $e_1, e_2 \in \text{vect}(j, k)$, d'où $\text{vect}(e_1, e_2) = \text{vect}(j, k)$.

2. Soit $P = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$. On a

$$P = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ -x+3y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

§ 2. Parties génératrices

DÉFINITION 23

1. Si A est une partie de E , on appelle sous-espace engendré par A l'intersection \overline{A} des sous-espaces vectoriels contenant A .
2. Si F est un sous-espace vectoriel et si $\overline{A} = F$, on dit que A est une partie génératrice de F .

PROPOSITION 24

Le sous-espace \overline{A} engendré par A est égal à l'ensemble \widehat{A} des combinaisons linéaires de A .

Preuve — Comme \overline{A} est un sous-espace vectoriel contenant A , il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A , c'est-à-dire $\widehat{A} : A \subset \widehat{A} \subset \overline{A}$. Il suffit donc de montrer que \widehat{A} est lui-même un sous-espace vectoriel : soit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i$, avec $x_i, y_i \in A$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu \beta_j y_j$ est bien une combinaison linéaire d'éléments de A et donc est dans \widehat{A} . \widehat{A} est un sous-espace vectoriel contenant A , il est donc contenu dans \overline{A} . \square

REMARQUE 25 — On a bien montré que $\widehat{A} = \overline{A}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A . En particulier, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant x_1, \dots, x_n .

EXEMPLE 26 — Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+2y \\ 3x-2y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{K}^2 \right\} \subset \mathbb{K}^3$. Alors F est un sous-espace vectoriel car

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

1.2.2 Somme d'espaces vectoriels

COROLLAIRE 27

Soit F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . Alors l'ensemble

$$\sum_{i=1}^n F_i = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid \forall i, x_i \in F_i \right\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les F_i .

REMARQUE 28 —

1. En particulier, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.
2. On a $\text{vect}(x_1, \dots, x_n) = \overline{A}$ avec $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, donc c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les x_i .

EXEMPLE 29 —

1. $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.
2. $\mathbb{R}^3 = \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} + \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}[X] = \{(u_n) \in \mathbb{R}[X], u_0 = 0\} + \{P \in \mathbb{R}[X], u_1 = 0\}$.
En effet, $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ avec $v_0 = 0, v_n = u_n$ si $n > 0$ et $w_0 = u_0, w_n = 0$, si $n > 0$.

1.3 APPLICATIONS LINÉAIRES

1.3.1 Définitions et exemples

DÉFINITION 30

Soit E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et u une application de E dans F . On dit que

1. u est linéaire si $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.
2. u est un endomorphisme (ou un opérateur) si $F = E : u : E \rightarrow E$.
3. u est un isomorphisme, si u est bijective.
4. u est un automorphisme, si u est un isomorphisme et $E = F$.

EXEMPLE 31 —

1. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ fixé, l'application $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ est un automorphisme de E appelé homothétie de rapport λ .
2. $u : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
3. L'application $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais ce n'est pas un automorphisme (le noyau n'est pas nul).

PROPOSITION 32

Soit u un isomorphisme de E sur F , alors sa réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Preuve — Il faut vérifier que u^{-1} est linéaire : Soit y et y' dans F . Il existe x et x' dans E tels que $u(x) = y$ et $u(x') = y'$.
Alors

$$u^{-1}(\lambda y + \mu y') = u^{-1}(\lambda u(x) + \mu u(x')) \stackrel{u \text{ lin.}}{=} u^{-1}(u(\lambda x + \mu x')) = \lambda x + \mu x' = \lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y'),$$

et u^{-1} est bien linéaire. □

REMARQUE 33 — Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$ et donc $u(0) = 0$ et u est injective ssi son noyau est réduit à 0.

1.3.2 L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$

DÉFINITION 34

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

PROPOSITION 35

L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ a une structure de \mathbb{K} espace vectoriel avec les lois

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, (u + v)(x) = u(x) + v(x) \text{ et } (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$$

Preuve — Il faut vérifier toutes les conditions, c'est long mais pas difficile, donc un bon exercice. □

PROPOSITION 36

Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire : $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Preuve — On calcule

$$(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) \stackrel{f \text{ lin.}}{=} g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \stackrel{g \text{ lin.}}{=} \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)),$$

et $g \circ f$ est bien linéaire. \square

EXEMPLE 37 — L'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n + nu_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est un endomorphisme.

1.4 SOMMES DIRECTES

DÉFINITION 38

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont en sommes directes si $F \cap G = \{0\}$ et note alors $F \oplus G$. De plus, si $E = F + G$, alors on dit que F et G sont supplémentaires :

$$E = F \oplus G \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}).$$

PROPOSITION 39

Avec les notations précédentes $E = F \oplus G$ si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Preuve — Si tout x dans E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, alors certainement $E = F + G$ et si $x \in F \cap G$, alors on peut choisir $(x_F, x_G) = (x, 0)$ ou $(x_F, x_G) = (0, x)$ et l'unicité implique $x_F = x_G = 0$, ce qui montre que $F \cap G = \{0\}$. Et si $E = F \oplus G$, alors certainement il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$. \square

EXEMPLE 40 —

1. Soit $D_1 = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathbb{K}^2 = D_1 \oplus D_2$ car
 - (a) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_1 \cap D_2$, alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\lambda = \mu = 2\mu$, donc $\lambda = \mu = 0$ et $\vec{u} = \vec{0}$.
 - (b) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

On trouve $\lambda = y - x$ et $\mu = 2x - y$. Donc $\vec{u} \in D_1 + D_2$.

2. On verra que deux droites vectorielles D_1 et D_2 distinctes dans le plan sont supplémentaires : $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$.

Dans \mathbb{R}^3 , vous pouvez montrer que deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires l'une de l'autre : on verra que l'on a besoin de rajouter une troisième droite D_3 . On va définir la somme directe de 3 (ou plus) espaces $E = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

3. Soit $D = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Alors $\mathbb{K}^3 = D \oplus P$ car
 - (a) Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D \cap P$, alors il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La deuxième coordonnée donne $\mu = 0$, puis la première donne $\lambda = 0$ et enfin $\nu = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$.

(b) De plus, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, on cherche λ, μ et $\nu \in \mathbb{K}$, tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \mu \\ \mu + \nu \end{pmatrix}.$$

La seconde coordonnée donne $\nu = y$, puis la première donne $\lambda = x - y$ et enfin $\nu = z - y$.

(c) Soit $D = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $P = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in D \cap P$, donc D et P ne sont pas en somme directe.

THÉORÈME 41

Soit F_1, \dots, F_n des sous espaces vectoriels de E et u l'application linéaire surjective :

$$F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow F = F_1 + \dots + F_n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est un isomorphisme d'espace vectoriels.
2. Tout $x \in F$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^n x_i$, avec $x_i \in F_i$.
3. $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ entraîne $x_i = 0$ pour tout i .
4. Pour tout i , $F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j = \{0\}$.

Preuve — 2/ dit que u est bijective et 3/ qu'elle est injective donc bijective puisque u est toujours surjective. On en déduit donc que 1/, 2/ et 3/ sont équivalentes.

3/ \Rightarrow 4/ s'il existe $x_i \in F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j$, alors $x_i = \sum_{i \neq j} x_j$, donc $0 = x_i - \sum_{i \neq j} x_j$, et d'après le 3/ on en déduit que $x_i = x_j = 0$. Donc 4/ est vérifiée.

4/ \Rightarrow 3/ Supposons $\sum x_i = 0$. S'il existe un i tel que $x_i \neq 0$ alors $x_i = -\sum_{i \neq j} x_j \in F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j$, ce qui contredit 4/. \square

DÉFINITION 42

Lorsque les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on dit que la somme des F_i est directe ou que F est la somme directe des F_i . On écrit

$$F = \bigoplus_{i=1}^n F_i \quad \text{où} \quad F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n.$$

REMARQUE 43 —

1. On a $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, car tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :

$$\vec{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. D'après 3/ $F = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_n$ si et seulement si tout vecteur $x \in F$ se décompose de manière unique dans $F_1, \dots, F_n : x = x_1 + \cdots + x_n$. On en déduit par récurrence que c'est équivalent à montrer par exemple (l'ordre étant indifférent)

$$\left(\cdots ((F_1 \oplus F_2) \oplus F_3) \oplus \cdots \oplus F_{n-1} \right) \oplus F_n.$$

3. Montrez que $D_1 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_3 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont en somme directe. On vérifie que

$D_1 \cap D_2 = \{0\}$, puis si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D_1 \oplus D_2) \cap D_3$, alors il existe λ, μ et $\nu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = 3\mu + 2\nu & (a) \\ 0 = 2\mu + \nu & (b) \\ \lambda = \mu + 2\nu & (c) \end{cases}.$$

De (a) – (c) on trouve $\mu = 0$, la seconde coordonnée donne $\nu = 0$ et finalement $\lambda = 0$. Ce qui montre bien que $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. On a en fait $\mathbb{K}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. Vous pouvez le vérifier ou attendre la partie sur la dimension d'un espace vectoriel.

4. Mais si pour montrer que F_1 et F_2 sont en somme directe il suffit de motrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, ce n'est plus vrai pour $n \geq 3$:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \quad F_i \cap F_j = \{0\} \not\Rightarrow F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$

comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}^2 : F_1 = \langle i \rangle, F_2 = \langle j \rangle$ et $F_3 = \langle i + j \rangle$.

5. Nous admettrons qu'un sous-espace $F \subset E$ admet toujours un supplémentaire. L'exemple ci-dessus montre qu'un supplémentaire n'est pas unique. Par contre, on peut montrer que deux supplémentaires à un même espace sont toujours isomorphes.

1.5 FAMILLES LIBRES, FAMILLES GÉNÉRATRICES, BASES

1.5.1 Familles libres

§ 1. Définition

DÉFINITION 44

1. Une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_m) est libre si elle vérifie :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = 0 \text{ si et seulement si } \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i.$$

On dit aussi que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants \textit{线性无关}.

2. Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ non nécessairement finie est libre si toute sous famille finie $(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ est libre. On dit aussi que les vecteurs e_i sont linéairement indépendants.
3. Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, c'est-à-dire si et seulement si il existe $(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ une sous-famille et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ **non tous nuls** tels que

$$\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_m e_{i_m} = 0,$$

et on dit alors que les vecteurs e_i sont linéairement dépendants \textit{线性相关}.

EXEMPLE 45 —

1. Une famille de deux vecteurs (e_1, e_2) est liée si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires \textit{共线}.

2. Une famille de trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) dans \mathbb{R}^3 est libre si et seulement si ils ne sont pas coplanaires (leur déterminant est non nul).
3. Attention $(1, i)$ est libre dans \mathbb{R} mais est liée dans \mathbb{C} .

EXEMPLE 46 —

1. Dans \mathbb{K}^n , la famille $((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est libre.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, on pose $X^0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots)$. La famille $(X^0, X^1, \dots, X^n, \dots)$ est libre.
3. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une suite de nombres strictement décroissante, alors $(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x})$ est libre : procéder par récurrence et supposer une relation de dépendance entre m vecteurs multiplier par un $e^{-\alpha_i x}$, dériver et en déduire une relation de dépendance entre $m - 1$ de dépendance entre $m - 1$ vecteurs. Conclure.
4. La famille $(e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.
5. Une sous-famille d'une famille libre est libre.

§ 2. Caractérisation

PROPOSITION 47

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs telle que $e_1 \neq 0$ et pour tout $2 \leq i \leq n$, $e_i \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$, alors la famille est libre.

Preuve — On procède par récurrence sur n , pour $n = 1$ la propriété est évidente. Pour $n \geq 2$, si on a relation de dépendance $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$, alors $\lambda_n = 0$ car sinon

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

ce qui contredit les hypothèses, et donc on a une relation de dépendance entre e_1, \dots, e_{n-1} , et comme par récurrence cette famille est libre, on en déduit que les λ_i sont nuls pour tout i et la famille est libre. \square

PROPOSITION 48

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, (x_1, \dots, x_n) une famille libre de F et (y_1, \dots, y_m) une famille libre de G . Alors $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une famille libre de $F \oplus G$.

Preuve — Supposons $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m = 0$, alors

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = -(\beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m)$$

mais ce vecteur appartient à $F \cap G$, or ces deux espaces sont en somme directe, donc c'est le vecteur nul, et tous les α_i et les β_i sont nuls puisque les familles (x_i) et (y_i) sont libres, ce qui permet de conclure. \square

1.5.2 Familles génératrices

DÉFINITION 49

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E si $\text{vect}(x_i, i \in I) = E$.

EXEMPLE 50 —

1. La famille $((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{K} .
2. X^0, \dots, X^n engendrent $\mathbb{K}_n[X] = \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \mid \forall k \geq n + 1, u_k = 0\}$, l'ensemble des suites dont les termes sont tous nuls à partir du rang $n + 1$.
3. (X^0, \dots, X^n, \dots) est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$ (il n'existe pas de famille génératrice finie de $\mathbb{K}[X]$!).
4. La famille (f_1, f_2) de vecteurs de \mathbb{R}^2 avec $f_1(1, 1)$ et $f_2(1, -1)$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

PROPOSITION 51

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E et (x_1, \dots, x_n) une famille génératrice de F et (y_1, \dots, y_m) une famille génératrice de G . Alors $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Preuve — Tout élément $z \in F + G$ s'écrit $z = x_F + y_G$ avec $x_F \in F$ et $y_G \in G$, et par hypothèse $x_F = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ et $y_G = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m$. Donc

$$z = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m,$$

et $z \in \text{vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ et la famille est bien génératrice. \square

1.5.3 Bases

§ 1. Définitions

DÉFINITION 52

Une base \基 d'un espace vectoriel E est une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice.

EXEMPLE 53 —

1. $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1(1, 1, 0)$, $f_2(1, 0, 1)$ et $f_3(0, 1, 0)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. On appelle base canonique de \mathbb{R}^n la base (e_1, \dots, e_n) , où e_i est le vecteur $(0 \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 étant en i -ème position.
4. Deux vecteurs non colinéaires dans le plan ou trois vecteurs non coplanaires dans \mathbb{R}^3 forment une base!

THÉORÈME 54

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel E , $E \neq \{0\}$ admet une base (mais elle n'est pas nécessairement finie!)

DÉFINITION 55

Soit E un espace vectoriel qui admet une base finie (e_1, \dots, e_n) . On appelle coordonnées \坐标 du vecteur $u \in E$ dans cette base l'unique n -uplet (x_1, \dots, x_n) tel que

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

REMARQUE 56 — L'existence vient du fait que la famille est génératrice, l'unicité du fait qu'elle est libre : supposons qu'il existe des autres coordonnées $u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ et en prenant la différence $(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$, d'où $x_i = y_i$ pour tout i .

§ 2. Caractérisation

PROPOSITION 57

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E , (x_1, \dots, x_n) une base de F et (y_1, \dots, y_m) une base de G . Alors

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une base de $F + G$ ssi F et G sont en somme directe.

Preuve — Si $F \oplus G$, on a vu que la famille était libre et génératrice. D'autre part si $0 \neq a \in F \cap G$, alors a s'écrit dans la base des x_i et dans la base des y_i

$$a = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m$$

et a s'écrit de deux manières avec des vecteurs de la famille $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$: ce n'est pas une base. \square

REMARQUE 58 — Pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de trouver une base de F et une base de G et montrer qu'en les concaténant on obtient une base de E .

EXEMPLE 59 — On a \mathbb{R}^3 est la somme directe du plan P d'équation $x + y + z = 0$ et de la droite D engendrée par le vecteur $n(1, 1, 1)$. Une base de P est $e_1(1, -1, 0)$ et $e_2(1, 0, -1)$, donc (e_1, e_2, n) est une base de \mathbb{R}^3 .

PROPOSITION 60

Si E est engendré par une famille à n éléments (e_1, \dots, e_n) , alors toute famille libre (f_1, \dots, f_m) a au plus n éléments (c'est-à-dire $m \leq n$).

Preuve — On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est évident.

Supposons $\mathcal{P}(n)$: "un espace vectoriel engendré par n éléments, alors toute famille libre a au plus n éléments" est vrai.

Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: supposons que E est engendré par $n+1$ éléments et soit (f_1, \dots, f_m) une famille libre, on veut montrer que $m \leq n+1$.

Si pour tout i , $f_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors (f_1, \dots, f_m) est une famille libre d'un espace engendré par n éléments et donc $m \leq n$.

Sinon, il existe i_0 tel que

$$f_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{n+1} + \text{une combinaison linéaire des } e_1, \dots, e_n \text{ avec } \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Mais pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f_i = \lambda_i e_{n+1} + \text{une combinaison linéaire des } e_1, \dots, e_n.$$

donc pour $i \neq i_0$, la famille des vecteurs $f_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est libre et dans un espace engendré par n vecteurs d'où par récurrence $m-1 \leq n$ et donc $m \leq n+1$ et la démonstration est terminée.

Remarquez que l'on a en fait appliqué la méthode du pivot de Gauss en choisissant la ligne i_0 pour éliminer le vecteur e_{n+1} . \square

COROLLAIRE 61

(Fondamental) Toute base d'un espace vectoriel engendré par n éléments a au plus n éléments.

COROLLAIRE 62

(Très pratique) Toute famille libre à n éléments dans un espace E engendré par n éléments est une base.

Preuve — Soit une famille libre (e_1, \dots, e_n) libre.

Montrons que la famille est génératrice : soit $x \in E$, alors (e_1, \dots, e_n, x) est liée car a $n+1$ éléments et E engendré par n éléments : $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0$ avec les λ_i non tous nuls. Mais si $\lambda = 0$, alors ceci contredit (e_1, \dots, e_n) libre, donc $\lambda \neq 0$, mais alors

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n,$$

et x appartient bien à l'espace engendré par les e_i qui donc forment une famille génératrice, donc une base puisque libre. \square

EXEMPLE 63 — $f_1(1, 2, 0)$, $f_2(1, 0, 3)$ et $f_3(0, 1, 0)$ forment une famille libre de \mathbb{R}^3 donc est une base (car \mathbb{R}^3 est engendré par 3 vecteurs!).

Chapitre 2 Espaces vectoriels en dimension finie

2.1 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

2.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

DÉFINITION 64

Un \mathbb{K} -espace vectoriel E est dit de dimension finie si E admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

EXEMPLE 65 —

1. \mathbb{K}^n est de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

2.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

THÉORÈME 66

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Alors

1. E admet une base finie.
2. Toute base de E a le même nombre d'éléments n .

On dit alors que E est de dimension n sur \mathbb{K} , ce que l'on note $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ou plus simplement $\dim E = n$. Par convention si $E = \{0\}$, $\dim E = 0$.

Preuve — 1/ On va construire explicitement une base : supposons que $E = \text{vect}(f_1, \dots, f_m)$

On choisit $e_1 \in \{f_1, \dots, f_m\}$ non nul (existe car $E \neq \{0\}$).

Puis on choisit $e_2 \in \{f_1, \dots, f_m\} \setminus \{e_1\}$ tel que $e_2 \notin \text{vect}(e_1)$.

Puis on choisit $e_3 \in \{f_1, \dots, f_m\} \setminus \{e_1, e_2\}$ tel que $e_3 \notin \text{vect}(e_1, e_2)$, etc.

On continue tant qu'il existe r , $e_r \in \{f_1, \dots, f_m\} \setminus \{e_1, \dots, e_{r-1}\}$, $e_r \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_{r-1})$.

On s'arrête donc si $\forall i, f_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_r)$ et la famille (f_1, \dots, f_m) étant génératrice, on en déduit que (e_1, \dots, e_r) l'est aussi.

De plus, comme pour tout $2 \leq i \leq r$, $e_i \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$, la famille est libre.

On en déduit que (e_1, \dots, e_r) est une base.

2/ Si (e_1, \dots, e_r) et (e'_1, \dots, e'_n) sont deux bases de E , alors (e_1, \dots, e_r) est une famille génératrice et (e'_1, \dots, e'_n) est une famille libre, le théorème de la fin du chapitre précédent nous dit que $n \leq r$. De même, on montre que $n \leq r$ et donc $n = r$, ce que nous voulions. \square

REMARQUE 67 — On a en fait montré que l'on peut extraire une base de toute famille génératrice.

2.1.3 Exemples

EXEMPLE 68 —

1. \mathbb{K}^n est de dimension n car $(e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ en est une base.

2. $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$ car $(1, X, \dots, X^n)$ en est une base.

3. Dans \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique, on pose $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(0, 1, 2)$, $e_3(-1, 0, 2)$ et $e_4(0, 1, 1)$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice. On a $e_2 \notin \text{vect}(e_1)$, $e_3 \in \text{vect}(e_1, e_2)$ et $e_4 \notin \text{vect}(e_1, e_2)$. Donc la famille (e_1, e_2, e_4) est une base de \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION 69

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

1. Si F est de dimension 1, on dit que F est une droite vectorielle.
2. Si F est de dimension 2, on dit que F est un plan vectoriel.
3. Si F est de dimension $n - 1$, F est un hyperplan de E .

2.1.4 Caractérisation des bases en dimension finie

PROPOSITION 70

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et (f_1, \dots, f_n) une famille de vecteurs de E . Alors

$$(f_1, \dots, f_n) \text{ est une base} \iff (f_1, \dots, f_n) \text{ est libre} \iff (f_1, \dots, f_n) \text{ est génératrice}$$

Preuve — Si (f_1, \dots, f_n) libre et non génératrice, alors il existe $x \in E$, $x \notin \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et alors en posant $f_{n+1} = x$, on obtient une famille libre à $n + 1$ éléments ce qui contredit que E est engendré par n éléments; donc la famille est génératrice et donc une base.

2/ Si (f_1, \dots, f_n) est génératrice, mais pas libre, alors il existe un f_i qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres f_j . Supposons, quitte à permuter les éléments, que c'est f_n , alors (f_1, \dots, f_{n-1}) est encore génératrice; mais alors E est engendré par $n - 1$ éléments et (e_1, \dots, e_n) ne peut pas être libre, ce qui est absurde puisque c'est une base. On en déduit que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre, donc c'est une base. On en déduit l'équivalence. \square

EXEMPLE 71 — Prenons la famille (f_1, f_2, f_3) avec $f_1(1, 0, 2)$, $f_2(1, 1, 2)$ et $f_3(2, 0, 2)$.

On a $e_1(1, 0, 0) = f_3 - f_1$, $e_2 = f_2 - f_1$ et $e_3 = f_1 - 1/2f_3$, donc la famille est génératrice dans \mathbb{R}^3 ; c'est une base puisque \mathbb{R}^3 est de dimension 3.

2.1.5 Théorème de la base incomplète

On vient de voir que d'une famille génératrice, on peut extraire une base, ici on étudie le processus inverse :

THÉORÈME 72

Soit E un espace vectoriel de base (e_1, \dots, e_n) , $n \geq 1$ et soit (f_1, \dots, f_m) une famille libre. On peut compléter la famille (f_1, \dots, f_m) en une base (f_1, \dots, f_n) , et de plus on peut choisir les vecteurs f_{m+1}, \dots, f_n parmi les e_i .

Preuve — La preuve est toujours sur le même algorithme :

1. Si pour tout j , $e_j \in \text{vect}(f_1, \dots, f_m)$, alors (f_1, \dots, f_m) est génératrice, et par hypothèse, elle est libre, donc c'est une base et on a fini.
2. Sinon, soit j tel que $e_j \notin \text{vect}(f_1, \dots, f_m)$, on pose $f_{m+1} = e_j$

et on recommence avec $m := m + 1$, l'algorithme s'arrête après au plus n étapes; on obtient ainsi une base (f_1, \dots, f_n) ayant les propriétés désirées. \square

EXEMPLE 73 — Soit \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (i, j, k) et soit le vecteur $e_1(1, 1, 1)$. On a $i \notin \text{vect}(e_1)$ et $j \notin \text{vect}(e_1, i)$ donc (e_1, i, j) est une base de \mathbb{R}^3 , car de dimension 3.

2.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

2.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION 74

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Alors

1. F est de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$;
2. De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

EXEMPLE 75 —

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$, alors les vecteurs $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$ et $(1, 0, 0, -1)$ forment une famille libre, donc F est de dimension au moins 3 mais $F \neq \mathbb{R}^4$ car $(1, 0, 0, 0) \notin F$, donc $\dim F \leq 3$. On en déduit que F est de dimension 3 et une base de F est donnée par les vecteurs $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$ et $(1, 0, 0, -1)$
2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$. Alors G contient les vecteurs $g_1(0, 0, 1, -1)$, $g_2(1, -1, 0, 0)$ donc $\text{vect}(g_1, g_2) \subset G$. De plus, si $(x, y, z, t) \in G$, alors $(x, y, z, t) = (x, -x, z, -z)$ puisque $x + y = 0$ et $z + t = 0$; donc $(x, y, z, t) = xg_1 + zg_2 \in \text{vect}(g_1, g_2)$. On en déduit que $G = \text{vect}(g_1, g_2)$ famille libre à deux éléments, donc c'est une base de G qui est de dimension 2.

2.2.2 Produits

PROPOSITION 76

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Preuve — En effet, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , et (f_1, \dots, f_m) une base de F , alors vérifie facilement que la famille

$$((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m))$$

est libre et génératrice, donc une base de $E \times F$. □

2.2.3 Sommes

PROPOSITION 77

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Preuve — Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $F \cap G$ que l'on complète en

$$\begin{cases} (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ base de } F \\ (e_1, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_m) \text{ base de } G \end{cases}$$

et alors on vérifie facilement que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n, e'_{p+1}, \dots, e'_m)$ est une famille libre qui engendre $F + G$ et donc est une de $F + G$. On a donc, $\dim F + G = n + m - p$, $\dim E = n$, $\dim F = m$ et $\dim F \cap G = p$. □

COROLLAIRE 78

(Très utile) Soit $F, G \subset E$, (f_1, \dots, f_l) une base de F et (g_1, \dots, g_m) une base de G . Alors

$$F \oplus G \iff \dim(F + G) = \dim F + \dim G \iff (f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_m) \text{ est une base de } F + G$$

Preuve — En effet, d'après la proposition ci-dessus, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ si et seulement si $\dim F \cap G = 0$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$.

Et on a déjà vu que F et G sont en somme directe ssi les deux bases mise bout à bout (concaténées) forment une base de la somme. □

REMARQUE 79 —

1. De même $F_1 \oplus \dots \oplus F_l$ si et seulement si $\dim(F_1 + \dots + F_l) = \dim F_1 + \dots + \dim F_l$ si et seulement en concaténant une base de chaque F_i on obtient une base de la somme des F_i .
2. L'intersection de deux plans vectoriels distincts dans \mathbb{R}^3 est de dimension 1 (la situation change complètement du point de vue affine : les plans peuvent être parallèles).
3. Soit E un espace vectoriel de dimension n , et F un sous-espace vectoriel de dimension p , alors tout supplémentaire est de dimension $n - p$.

EXEMPLE 80 — Déterminer un supplémentaire de $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$ dans \mathbb{R}^4 . On a vu que les vecteurs $e_1(1, -1, 0, 0)$ et $e_2(0, 0, 1, -1)$. Pour trouver H un supplémentaire de G , on complète la famille (e_1, e_2) en une base suivant l'algorithme habituel : $e_3(1, 0, 0, 0) \notin \text{vect}(e_1, e_2)$ et $e_4(0, 0, 1, 0) \notin \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$, donc (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de \mathbb{R}^4 et $H = \text{vect}(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de G .

2.2.4 Rang d'une famille

DÉFINITION 81

On appelle rang d'une famille (e_1, \dots, e_l) de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par ceux-ci

$$\text{rg}(e_1, \dots, e_l) = \dim \text{vect}(e_1, \dots, e_l).$$

PROPOSITION 82

Le rang de la famille (e_1, \dots, e_l) est inférieur à l et il vaut exactement l si et seulement si elle est libre.

COROLLAIRE 83

Si $\dim E = n$, alors (e_1, \dots, e_n) est de rang n si et seulement si c'est une base.

2.3 SOUS-ESPACES AFFINES

Ici, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2.3.1 Définitions et premières propriétés

§ 1. Définitions

DÉFINITION 84

Une partie \mathcal{F} de E est un sous-espace affine de E , s'il existe un élément $A \in E$ et F un sous-espace vectoriel tels que

$$\mathcal{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}.$$

On dit que \mathcal{F} passe par A , a pour direction F et on écrit $\mathcal{F} = A + F$.

REMARQUE 85 —

1. Si $B \in \mathcal{F}$, alors $B = A + \vec{u}$, $u \in F$, on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \in F$ et \mathcal{F} est l'ensemble des points B tels que $\overrightarrow{AB} \in F$.
2. Un espace affine n'est jamais vide.

EXEMPLE 86 —

1. Soit une droite \mathcal{D} affine de \mathbb{R}^2 d'équation $ax + by = c$ est un sous-espace affine de direction la droite vectorielle $D : ax + by = 0$ et passant $(0, \frac{c}{b})$ si $b \neq 0$ ou $(\frac{a}{c}, 0)$ sinon. En effet, si $M(x, y), M'(x', y') \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{M'M}(x - x', y - y')$ vérifie l'équation de P .
2. De même, le plan affine \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 d'équation $ax + by + cz = d$ est un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 de direction le plan vectoriel d'équation $P : ax + by + cz = 0$.

§ 2. Premières propriétés

PROPOSITION 87

Avec les notations précédentes, on a

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{F}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).

PROPOSITION 88

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E de direction F et passant par A . Alors

$$\forall B \in \mathcal{F}, \mathcal{F} = \{B + \vec{u}, \vec{u} \in F\},$$

et en particulier la direction F de \mathcal{F} ne dépend pas du point A .

Preuve — On a une bijection

$$\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, A + \vec{u} \mapsto A + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = B + \vec{u}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel F est uniquement déterminée par \mathcal{F} . Ceci justifie la définition : F est la direction de \mathcal{F} . \square

DÉFINITION 89

Si \mathcal{F} est un sous-espace affine de direction F , on dit que \mathcal{F} est de dimension $\dim F$.

REMARQUE 90 — On dira qu'un sous-espace affine de dimension 1 est une droite affine, un espace de dimension 2 est un plan affine et un sous-espace de dimension $n - 1$ dans E de dimension n est un hyperplan affine.

2.3.2 Exemples

§ 1. *Hyperplans affines* Soit $n \geq 2$ un entier et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β des réels non tous nuls. L'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta\}$$

est un hyperplan affine passant par un point M à déterminer : si $\alpha_1 \neq 0$, on peut prendre $M = (\frac{\beta}{\alpha_1}, 0, \dots, 0)$ et d'hyperplan vectoriel

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

L'espace vectoriel H est de dimension $n - 1$: on suppose par exemple $\alpha_1 \neq 0$ et alors la famille

$$((-\alpha_2, \alpha_1, 0, \dots, 0), \dots, (-\alpha_n, 0, \dots, 0, \alpha_1))$$

est une famille de $n - 1$ vecteur. On vérifie immédiatement qu'elle est libre. Donc $\dim H \geq n - 1$. Mais $H \neq \mathbb{R}^n$, car $(1, 0, \dots, 0) \notin H$, donc $\dim H \leq n - 1$. On déduit que $\dim H = n - 1$ et que

$$((-\alpha_2, \alpha_1, 0, \dots, 0), \dots, (-\alpha_n, 0, \dots, 0, \alpha_1))$$

est une base de H .

§ 2. *Équations différentielles* On cherche l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions f telles que $f' = af + b$ avec $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note S l'ensemble des fonctions qui vérifient $y' = ay$. Alors \mathcal{S} est un sous-espace affine de direction S :

$$\mathcal{S} = \varphi + S$$

avec φ une solution particulière.

EXEMPLE 91 — On cherche les fonctions telles que $f' + \frac{t}{1+t^2}f = \frac{1+2t^2}{1+t^2}$.

Une solution particulière est la fonction $f(t) = t$. On cherche maintenant toutes les fonctions f telles que $f' + \frac{t}{1+t^2}f = 0$. On remarque que $\int \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$, donc

$$f' + \frac{t}{1+t^2}f = 0 \iff \left(f' + \frac{t}{1+t^2}f\right) e^{1/2 \ln(1+t^2)} = 0 \iff \left(f e^{1/2 \ln(1+t^2)}\right)' = (f \sqrt{1+t^2})' = 0$$

On en déduit que $f = \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est donc une droite vectorielle et \mathcal{S} est une droite affine :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} + t, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

§ 3. Suites définies par une récurrence double

PROPOSITION 92

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle équation caractéristique de la suite l'équation :

$$(*) : X^2 - aX - b = 0.$$

Alors il existe des réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, si $(*)$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2
2. $u_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$ si $(*)$ admet une racine double λ
3. $u_n = A\rho^n \cos n\theta + B\rho^n \sin n\theta$ sinon $(*)$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.

Les constantes A et B se déterminent en fonction de u_0 et u_1 .

Preuve — On note F , l'ensemble des suites y telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n.$$

Soit les suites v et w définies par récurrence par $v_0 = w_1 = 1, v_1 = w_0 = 0$ et $v, w \in F$. On vérifie par récurrence que toute suite $y \in F$ s'écrit $y_n = y_0 v_n + y_1 w_n$ et que toute suite de cette forme appartient à F .

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de base (v, w) donc de dimension 2.

Pour conclure, il suffit de montrer que les suites s et t forment une base où

1. $s = (\lambda_1)^n$ et $t = (\lambda_2)^n$;
2. $s = (\lambda)^n$ et $t = (n\lambda)^n$;
3. $s = (\rho^n \cos n\theta)$ et $t = (\rho^n \sin n\theta)$.

En fait, si λ racine de l'équation caractéristique, alors $(\lambda^n) \in F : a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = \lambda^{n+2}$.

Et ceci marche encore si on considère $\lambda = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{\lambda} \neq \lambda$ complexes non réels, et alors les parties réelle et imaginaire de (λ^n) vérifient encore la condition car

$$\operatorname{Re} \lambda^n = \frac{\lambda^n + \bar{\lambda}^n}{2} \text{ et } \operatorname{Im} \lambda^n = \frac{\lambda^n - \bar{\lambda}^n}{2i}.$$

Donc $(\lambda^n) = (\cos n\theta) + i(\sin n\theta)$ et $(\bar{\lambda}^n) = (\cos n\theta) - i(\sin n\theta)$ Reste le cas λ racine double :

$$a(n+1)\lambda^{n+1} + bn\lambda^n - (n+2)\lambda^{n+2} = 0 \iff a\lambda - 2\lambda^2 = 0,$$

la dernière égalité résulte de $\lambda = a/2$, car λ racine double.

Il reste à prouver que la famille (s, t) est libre : on vérifie immédiatement que dans les trois cas $\left(\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (ici, on utilise que 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique).

Ceci se généralise aux suites définies par une récurrence d'ordre $r \geq 3$. □

EXEMPLE 93 —

1. Si $3u_n = 7u_{n-1} - 2u_{n-2}$ avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$, alors $u_n = 2^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
2. Si $u_n = -u_{n-1} - u_{n-2}$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, alors $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$.
3. Si $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 0$, alors $u_n = -2^n + n2^n$.

PROPOSITION 94

Soit a, b et c sont des réels, $b \neq 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c.$$

Alors u peut s'écrire $u = s + v$ où (s_n) est une suite particulière vérifiant la relation ci-dessus et F est l'espace vectoriel de la proposition précédente.

Preuve — On vérifie que si une suite s vérifie la relation de récurrence double ci-dessus, alors la suite $v = u - s$ vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n.$$

Ce qui termine la preuve. □

EXEMPLE 95 — Soit (u_n) , la suite définie par $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3$ et $u_0 = u_1 = 1$. Calculer u_n en fonction de n .

Pour cela, on cherche d'abord une suite particulière (s_n) vérifiant la relation $s_{n+2} = -s_{n+1} + 2s_n + 3$ sans conditions sur s_0 et s_1 .

Il est normal de se demander si une suite constante $s_n = l$ ne ferait pas l'affaire, mais $l = -l + 2l + 3$ n'a pas de solution. On cherche alors (s_n) du type $s_n = ln$, et (s_n) est solution particulière pour $l = 1$.

Puis on résout la partie homogène : une suite (v_n) telle que

$$v_{n+2} = -v_{n+1} + 2v_n$$

s'écrit $v_n = A(1)^n + B(-2)^n$.

Enfin, la suite (u_n) se met sous la forme $u_n = s_n + v_n$ et on trouve A et B en vérifiant la relation pour $n = 0$ et $n = 1$: $A + B = 1$ et $1 + A - 2B = 1$, d'où $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{1}{3}$. On a donc

$$u_n = n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n.$$

2.3.3 Espaces affines et géométrie

§ 1. Intersection

PROPOSITION 96

L'intersection de deux sous-espaces affines, \mathcal{F} et \mathcal{G} est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$ où F et G sont les directions de \mathcal{F} et \mathcal{G} .

Preuve — Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors il existe $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = A + G$. Donc $A + \vec{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ si et seulement si $\vec{u} \in F \cap G$, ce que nous voulions. \square

REMARQUE 97 — En particulier, pour étudier l'intersection de deux sous-espaces affines, il suffit de trouver un point de l'intersection, puis se ramener à l'étude de $E \cap F$ (dont on peut calculer la dimension).

EXEMPLE 98 — L'intersection de deux plans affines \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 dans \mathbb{R}^3 est soit l'ensemble vide, soit une droite, soit le plan lui-même, puisque $\dim P_1 \cap P_2$ est soit une droite, soit un plan (vectoriel).

§ 2. Parallélisme

DÉFINITION 99

Soit \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux sous-espaces affines de direction F_1 et F_2 .

1. On dit que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont parallèles si $F_1 = F_2$.
2. On dit que \mathcal{F}_1 est parallèle à \mathcal{F}_2 , si $F_1 \subset F_2$.

EXEMPLE 100 — Dans \mathbb{R}^3 , les plans $P_1 : 2x + 3y + z = 1$ et $P_2 = 2x + 3y + z = 3$ sont parallèles.

Chapitre 3 Polynômes à une indéterminée

Table des matières du chapitre

3.1 Définitions	20
3.1.1 Polynômes à une indéterminée	20
3.1.2 Écriture d'un polynôme	21
3.1.3 Degré d'un polynôme	21
3.1.4 Fonctions polynomiales	22
3.1.5 Composition de polynômes	23
3.2 L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$	23
3.2.1 Familles échelonnées en degré	23
3.2.2 Polynômes interpolateurs de Legendre	24

Un polynôme \多项式 s'écrit de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

où les a_i s'appellent les coefficients de P \多项式 P 的系数 et X est l'indéterminée.

Un problème est de définir correctement ce qu'on veut dire par l'indéterminée X , à quel ensemble appartiennent les coefficients; enfin on donnera les outils nécessaires pour manipuler les polynômes efficacement.

On retrouvera les polynômes tant en analyse (par ex. les développements limités) qu'en algèbre (par ex. polynôme caractéristique d'une application linéaire). Une bonne maîtrise des produits, divisions et factorisations de polynômes ainsi que de la caractérisation des racines est indispensable.

3.1 DÉFINITIONS

3.1.1 Polynômes à une indéterminée

Dans la suite \mathbb{K} représente un corps. Le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , mais \mathbb{K} peut aussi valoir \mathbb{Q} ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un entier premier.

DÉFINITION 101

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} toute suite d'éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{K} , nuls à partir d'un certain rang :

$$\exists d \in \mathbb{N}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \dots, a_d, 0, \dots, 0, \dots).$$

L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

On définit sur $\mathbb{K}[X]$ deux lois internes et une loi externe :

1. L'addition est définie par :

$$(a_0, \dots, a_d, 0, \dots) + (b_0, \dots, b_{d'}, 0, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui appartient à $\mathbb{K}[X]$ car $c_k = 0$ si $k > \sup(d, d')$; On pose $0 = (0, \dots, 0, \dots)$, l'élément neutre pour $+$.

2. La multiplication est définie par :

$$(a_0, \dots, a_d, 0, \dots) \times (b_0, \dots, b_{d'}, 0, \dots) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient bien à $\mathbb{K}[X]$, car $c_k = 0$ si $k > m + n$; on pose $1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ l'élément neutre pour \times .

3. une opération externe . :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)) &\mapsto \lambda \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n, 0, \dots). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et on a déjà vu que $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

3.1.2 Écriture d'un polynôme

PROPOSITION 102

En posant $X^0 = 1$, l'élément neutre de la loi \times et $X = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, on a

$$X^k = \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ fois}} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)}_k$$

Et un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique avec $a_n \neq 0$

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0.$$

On écrira souvent $P(X)$ pour P .

COROLLAIRE 103

Un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le polynôme nul si et seulement si $a_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

REMARQUE 104 — La somme de polynômes sous la nouvelle écriture ne pose pas de problème, pour le produit, on a donc

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^m b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k,$$

$$\text{où } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

EXEMPLE 105 — Pour multiplier deux polynômes, on regroupe les termes de même degré :

$$(X + 1)(X^3 + X + 2) = X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 2.$$

REMARQUE 106 — On notera aussi par exemple $\mathbb{Q}[X]$, pour les polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} ; de même pour $\mathbb{Z}[X]$ les polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} et si on a bien compris, pour tout anneau $(A, +, \times)$, on peut définir $A[X]$.

3.1.3 Degré d'un polynôme

DÉFINITION 107

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul. On appelle degré \text{次数} de P et on note $\deg P$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

De plus, si $d = \deg P$, $a_d X^d$ s'appelle terme dominant, a_d le coefficient dominant \text{最高次项系数} et a_0 le coefficient constant.

Un polynôme unitaire \text{首一多项式} est un polynôme dont le coefficient dominant est 1.

Enfin, le degré du polynôme nul est par convention $-\infty$.

PROPOSITION 108

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Il résulte des définitions de $+$ et \times que

1. Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg P + Q = \max(\deg P, \deg Q)$;
2. Si $\deg P = \deg Q$, alors $\deg P + Q \leq \deg P$;
3. $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg \lambda.P = \deg P$.

Preuve —

1. Si $P = 0$ alors $P + Q = Q$ et le résultat est évident. Il en est de même si $Q = 0$.

Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ alors, en posant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$, on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k,$$

ce qui entraîne

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

2. Si maintenant $m \neq n$, alors $m > n$ ou $n > m$.

Supposons $m > n$ alors le terme de coefficient m de $P + Q$ est b_m . Il est donc non nul et $\deg(P + Q) = m = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

De même si $n > m$.

3. Si $P = 0$ ou $Q = 0$, alors $P \times Q = 0$ et

$$\deg(PQ) = \deg(0) = -\infty = \deg(P) + \deg(Q).$$

Sinon, soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ avec $b_m \neq 0$. On a

$$PQ = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

Le coefficient de degré $n + m$ est $a_n b_m \neq 0$. De plus, tous les coefficients de degré strictement supérieur à $n + m$ sont nuls. Donc

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

□

EXEMPLE 109 —

1. $\deg[(X^3 + X + 3) + (X^2 + 2)] = 3$;
2. $\deg[(X^3 + X + 3) + (-X^3 + 3X + 7)] = 1$;
3. $\deg(X^3 + X + 2)(X^5 + 3X^4 + 2) = 8$.

COROLLAIRE 110

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

Preuve — $\deg P + \deg Q = -\infty$ si et seulement si $\deg P$ ou $\deg Q$ est égal à $-\infty$. □

REMARQUE 111 — On fera attention que si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors le degré de P est n si et seulement si $a_n \neq 0$.

EXEMPLE 112 — Quel est le degré du polynôme $(X + 1)^n - (X - 1)^n$?

3.1.4 Fonctions polynomiales

DÉFINITION 113

On appelle fonction polynomiale associée à un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, la fonction encore notée P ou $P(x)$ définie par

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k. \end{aligned}$$

REMARQUE 114 — On a un morphisme d'anneaux de $\psi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{P}$, $P \mapsto (x \mapsto P(x))$. Si le corps \mathbb{K} est de cardinal infini, on va montrer que ψ est en fait un isomorphisme.

EXEMPLE 115 — Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\left| P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$.

3.1.5 Composition de polynômes

DÉFINITION 116

Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

La composée des polynômes P et Q , notée $P \circ Q$, est le polynôme

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q^k.$$

REMARQUE 117 —

1. Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est donc égal à A , c'est pourquoi on utilise aussi bien les notations A que $A(X)$ pour désigner ce polynôme.
2. On a les égalités :

$$(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(R) = \lambda \cdot P(R) + \mu \cdot Q(R) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(R) = P(R) \times Q(R).$$

Mais, on fera attention au fait que l'opération de composition des polynômes n'est pas compatible avec les opérations d'addition et de multiplication. En effet, en général :

$$P \circ (Q + R) \neq P \circ Q + P \circ R \quad \text{et} \quad P \circ (Q \times R) \neq P \circ Q \times P \circ R.$$

3. Si $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ et $\tilde{Q} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ sont les fonctions polynomiales associées aux polynômes P et Q sur \mathbb{K} , alors $\tilde{P} \circ \tilde{Q}$ est la fonction polynomiale associée au polynôme $P \circ Q$.

EXERCICE 118 — Étudier $\deg(P \circ Q)$ en fonction de $\deg(P)$ et $\deg(Q)$.

3.2 L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{K}[X]$

3.2.1 Familles échelonnées en degré

PROPOSITION 119

L'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension infinie.

Il admet pour base (canonique) $(1, X, \dots, X^n, \dots)$.

Le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, de dimension $n + 1$.

Preuve — On procède par l'absurde : supposons qu'il existe une famille génératrice finie (P_1, \dots, P_m) de $\mathbb{K}[X]$. On pose $d = \max_{i \in [1, m]} \deg P_i$. Toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$ est de degré au plus d . Donc, par exemple, X^{d+1} ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des P_i . Ceci contredit (P_1, \dots, P_m) est une famille génératrice.

Ensuite, nous avons déjà montré dans les chapitres précédentes que $(1, X, \dots, X^n, \dots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. \square

DÉFINITION 120

On appelle une famille de polynômes (P_0, P_1, \dots, P_n) une famille échelonnée en degré si pour tout $i \in [0, n]$, $\deg P_i = i$.

PROPOSITION 121

Toute famille de polynômes échelonnée en degré (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Preuve — Comme $\dim \mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, il suffit de montrer que la famille (P_0, \dots, P_n) est libre : par hypothèse $\deg P_0 = 0$, donc $P_0 \neq 0$ et pour tout $i \geq 1$, $P_i \notin \text{vect}(P_0, \dots, P_{i-1}) \subset \mathbb{K}_{i-1}[X]$. On sait qu'alors la famille est libre. \square

REMARQUE 122 — Pour montrer qu'une famille de polynôme est une base, le plus souvent, vous montrerez qu'elle est échelonnée en degré. La famille $(1, 1 + X, 1 + X + X^2, \dots, 1 + X + \dots + X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car elle est échelonnée en degré.

Il y a cependant une famille de polynômes classique et très utile qui n'est pas échelonnée en degré et qui forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est ce que nous étudions dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Polynômes interpolateurs de Legendre

DÉFINITION 123

Soit a_0, \dots, a_n des éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts. On appelle polynômes interpolateur de Lagrange la famille de polynôme (L_0, \dots, L_n) définie par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(X) = \frac{(X - a_0) \cdots \widehat{(X - a_i)} \cdots (X - a_n)}{(a_i - a_0) \cdots \widehat{(a_i - a_i)} \cdots (a_i - a_n)} = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (X - a_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (a_i - a_k)}.$$

PROPOSITION 124

Avec les notations précédentes,

1. $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
2. la famille (L_0, \dots, L_n) est une famille de polynômes de degré n qui forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$.
4. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $Q(a_i) = \alpha_i$; on a en fait

$$Q = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k.$$

Preuve —

1. On a $L_i(a_j) = \frac{(a_j - a_0) \cdots \widehat{(a_j - a_i)} \cdots (a_j - a_n)}{(a_i - a_0) \cdots \widehat{(a_i - a_i)} \cdots (a_i - a_n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon car le facteur } (a_i - a_i) \text{ apparaît au numérateur.} \end{cases}$
2. Comme $\dim \mathbb{K}_n[X]$ est $n + 1$, il suffit de montrer que (l_0, \dots, L_n) est libre :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

3. D'après 1/, $\sum_{k=0}^n P(a_k)L_k(a_j) = P(a_j)$, donc $\sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$ est un polynôme qui convient.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme tel que $Q(a_i) = P(a_i)$, alors Q s'écrit dans la base (L_0, \dots, L_n) de la forme $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$ et en évaluant en a_j on trouve $Q(a_j) = \alpha_j$, donc $Q = P$, ce qui prouve l'unicité.

4. Avec les notations de l'énoncé, $\sum_{k=0}^n \alpha_k L_k$ vérifie les conditions et on vient de montrer en 3/ qu'il est unique.

EXEMPLE 125 — (Matrice de Vandermond) Soit a_0, \dots, a_n $n + 1$ éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} . On cherche l'inverse de la matrice

$$V(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On résout :

$$V(a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cdot 1 + x_1 a_1 + \dots + x_n a_1^n \\ \vdots \\ x_0 \cdot 1 + x_1 a_{n-1} + \dots + x_{n-1} a_{n-1}^n \\ x_0 \cdot 1 + x_1 a_n + \dots + x_{n-1} a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Si on pose $P = x_0 + x_1 X + \dots + x_n X^n$, alors on cherche P de degré au plus n tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = \alpha_i$. D'après ce qui précède

$$P = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{(X - a_0) \cdots (\widehat{X - a_i}) \cdots (X - a_n)}{(a_i - a_0) \cdots (\widehat{a_i - a_i}) \cdots (a_i - a_n)} = x_0 + x_1 X + \dots + x_n X^n.$$

Pour trouver (x_0, \dots, x_n) , il suffit de développer les polynômes interpolateur de Lagrange. Si $L_j = \sum_{i=0}^n a_{i,j} X^i$, alors $V(a_0, \dots, a_n)^{-1} = (a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$. En particulier, la matrice $V(a_0, \dots, a_n)$ est inversible !

□

REMARQUE 126 — Nous venons de montrer que si on fixe la valeur en $n + 1$ points deux à deux distincts d'un polynôme de degré au plus n , alors le polynôme est uniquement déterminé.

Si \mathbb{K} est de cardinal infini, alors il existe une famille de polynômes interpolateur de Lagrange pour tout $n \geq 1$, mais si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $n \leq p - 1$.

EXEMPLE 127 — Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$.