centralelille

Filtrage :

Synthèse de filtres

Olivier Bou Matar, Yannick Dusch, Cécile Ghouila Houri, Marc Goueygou, Philippe Pernod, Bogdan Piwakowski, Cathy Sion, Abdelkrim Talbi, Nicolas Tiercelin

Électronique

北航中法工程师学院
Centrale Pékin

centralelille

Plan du cours

1)Introduction au filtrage

2) Synthèse de filtres

3) Structures de filtres

北航中法工程师学院
Centrale Pékin

centralelille

Principe de la synthèse de filtres

Cahier des charges

Normalisation et transposition
→ Passe-bas normalisé (PBN)

Choix du type de réponse :
Butterworth, Chebyshev, Bessel

Choix de la structure :Passif ou actif

Détermination des polynômes en utilisant les tables (1^{er} et $2^{ème}$ ordre)

$$H_{LPN}(S) = \prod_i \frac{|s_i|^2}{(S - s_i)(S - \bar{s}_i)}$$

Structure électronique physique

Calcul de la fonction de transfert (forme canonique)

Exemple : Filtre passe-bas du $2^{ème}$ ordre

$$H_{\mathrm{real}}(s) = \frac{K\Omega_{0,\mathrm{real}}^2}{s^2 + \frac{\Omega_{0,\mathrm{real}}}{Q_{\mathrm{real}}} s + \Omega_{0,\mathrm{real}}}$$

$$K, Q_{\mathrm{real}}, \Omega_{0,\mathrm{real}} = f(R_i, C_i)$$

Identification des paramètres → R_i, C_i

Calcul de la fonction de transfert réelle
→ Dé-normalisation

北航中法工程师学院
Centrale Pékin

centralelille

Normalisation des filtres

- L'objectif de la normalisation d'un filtre est de ramener l'étude de tous les types de filtres à l'étude d'un filtre passe bas afin de faciliter les calculs.
- Pour cela on normalise les fonctions de transfert.

Les tables/abaques n'existent que pour des filtres passe-bas normalisés (PBN)

$$F_c = 1$$

Il est nécessaire de convertir n'importe quel filtre en filtre passe-bas normalisé

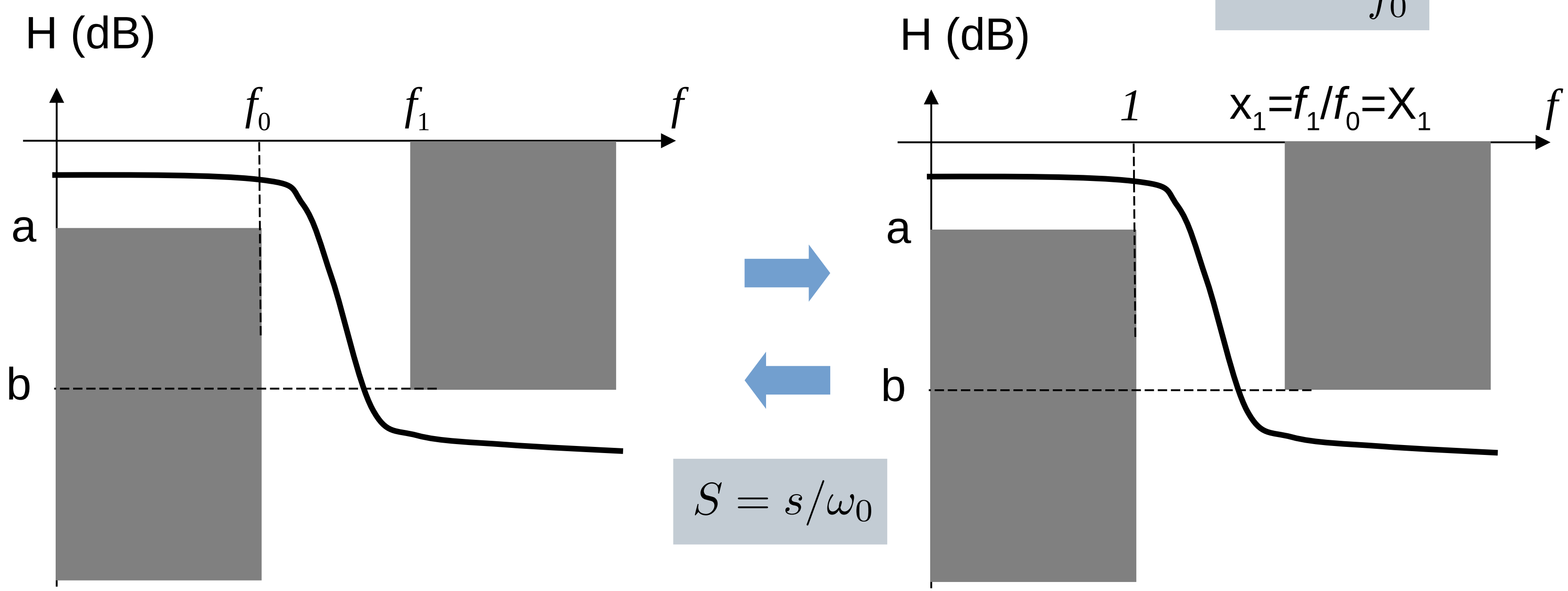
Fonction de transfert du PBN:

$$H_{PBN}(S) = \prod_i \frac{|s_i|^2}{(S - s_i)(S - \bar{s_i})}$$

北航中法工程师学院
Centrale Pékin
centralelille

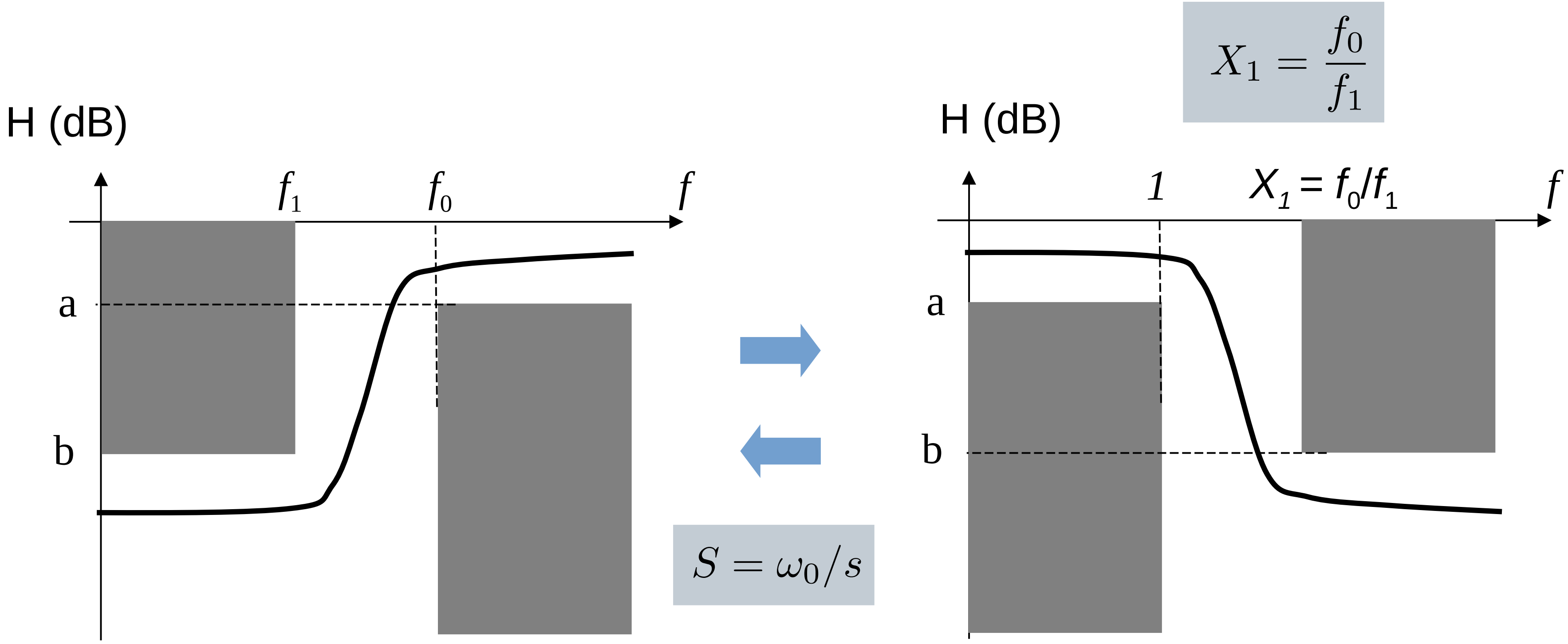
Normalisation : cas des filtres passe-bas

$$X_1 = \frac{f_1}{f_0}$$

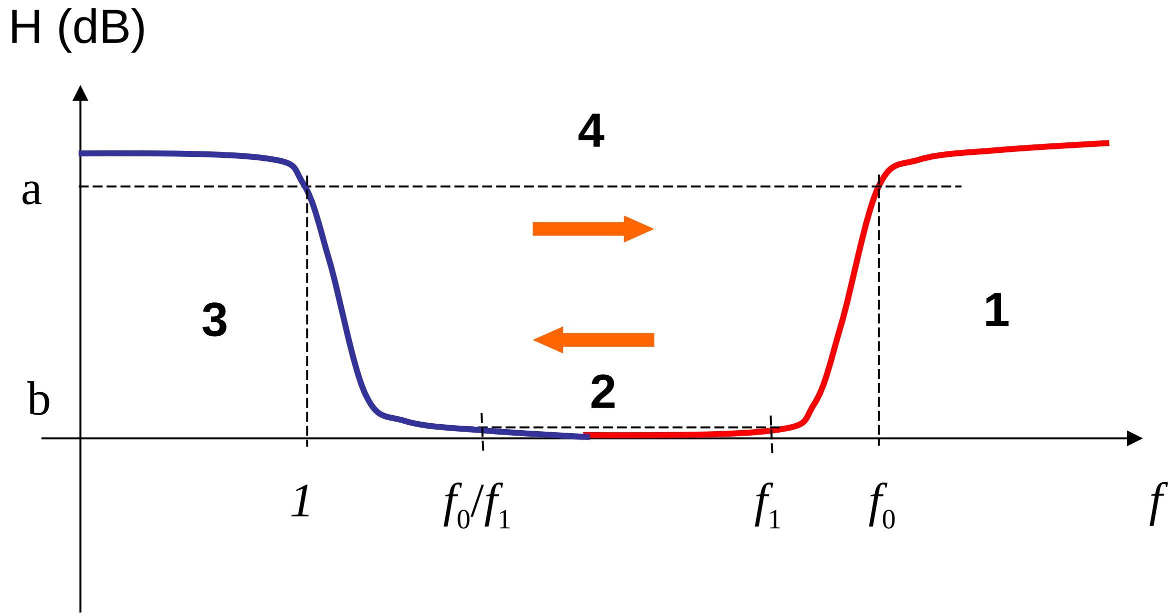


$$S = s/\omega_0$$

Normalisation : cas des filtres passe-haut



Normalisation : cas des filtres passe-haut



5 : implémentation

Normalisation

$$p \Rightarrow \frac{\omega_0}{p}$$

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{Q\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{Q} + p^2}$$

$$p \Rightarrow \frac{\omega_0}{p}$$

Passe-haut

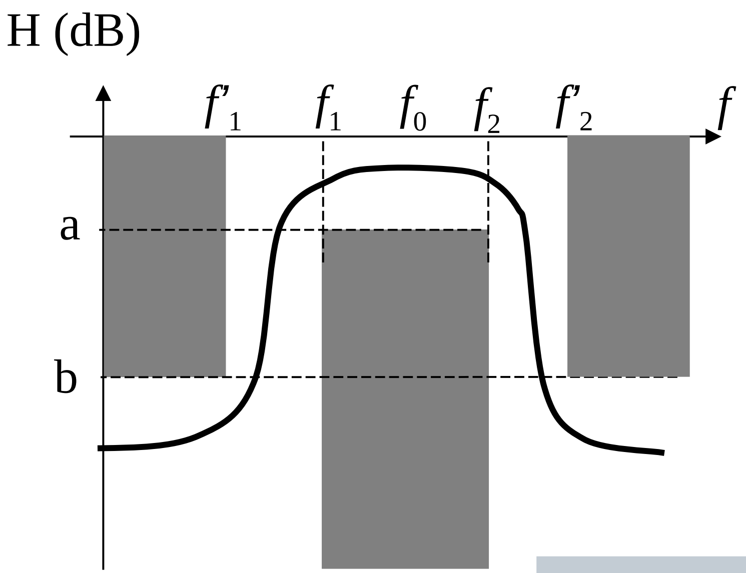
Passe-bas

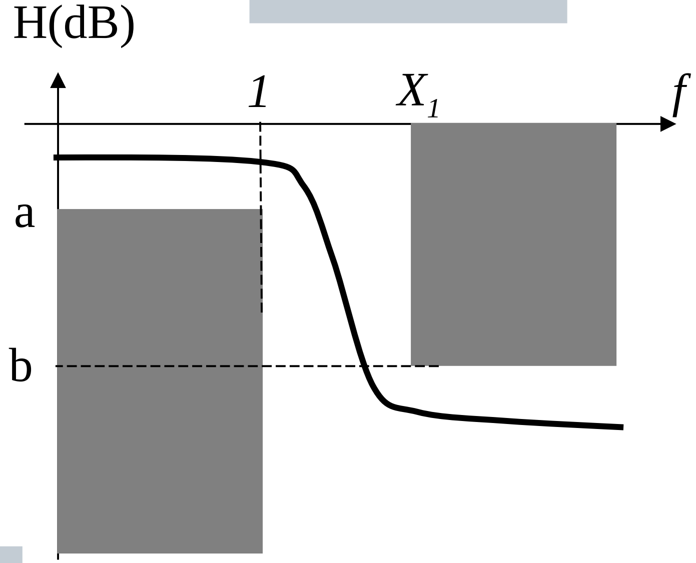
Dénormalisation

Normalisation : cas des filtres passe-bande

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f_1' f_2'}$$

$$X_1 = \frac{f_2' - f_1'}{f_2 - f_1}$$





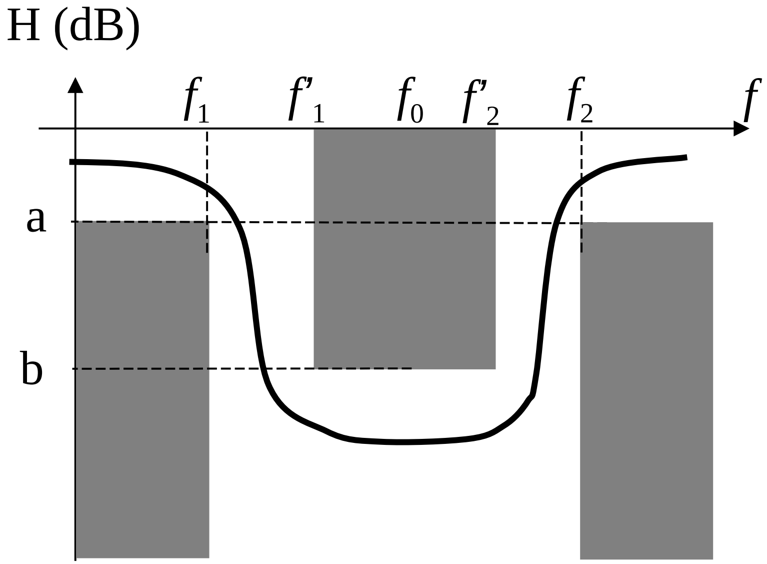
$$\omega \to \frac{\omega_0}{2\pi B}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

PBN d'ordre n → Passe-bande d'ordre 2n

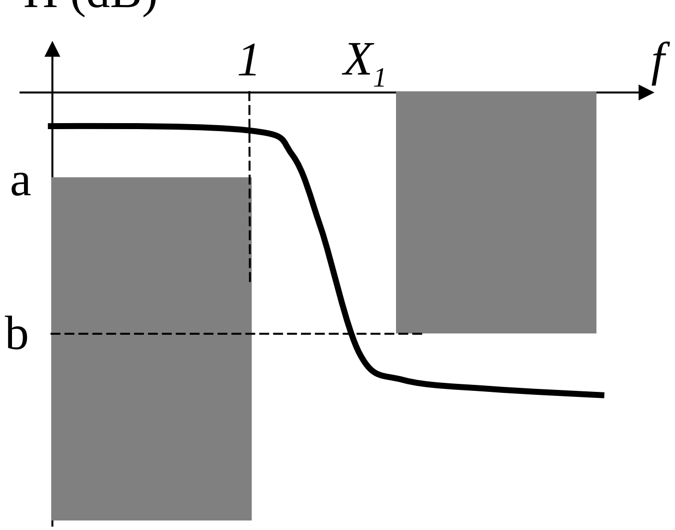
北航中法工程师学院 Centrale Pékin
centralelille

Normalisation : cas des filtres coupe-bande

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f_1' f_2'}$$



$$X_1 = \frac{f_2 - f_1}{f_2' - f_1'}$$



$$\omega \rightarrow \frac{\frac{2\pi B'}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

PBN d'ordre n → Coupe-bande d'ordre 2n

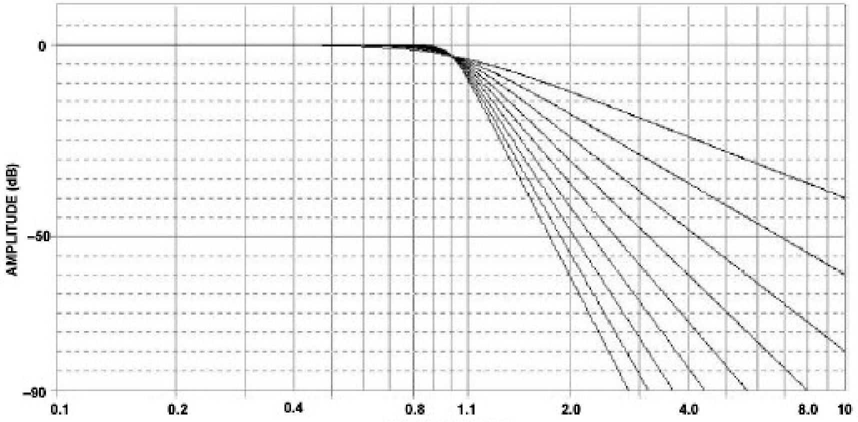
Choix du type de réponse

- Une fois normalisés, tous les filtres qu'ils soient passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande se traitent de la même manière : **comme un filtre passe-bas**.

- Il faut alors choisir le type de réponse du filtre en fonction de l'application : **Butterworth**, **Chebyshev**, **Bessel**, …

Filtre de Butterworth

Filtre pour lequel le gain est maximum pour la fréquence nulle et le plus constant possible dans la bande passante : ils obéissent au **critère de méplat**.



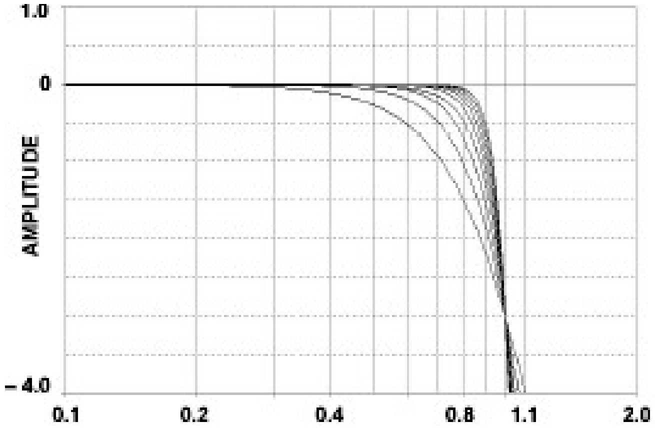
Fréquence (Hz)

$$H(p) = \frac{K}{1+(-1)^n p^{2n}} \longrightarrow |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^{2n}}}$$

$$H_{dB} = 20\log_{10}(K) - 10\log_{10}\left(1+\omega^{2n}\right)$$

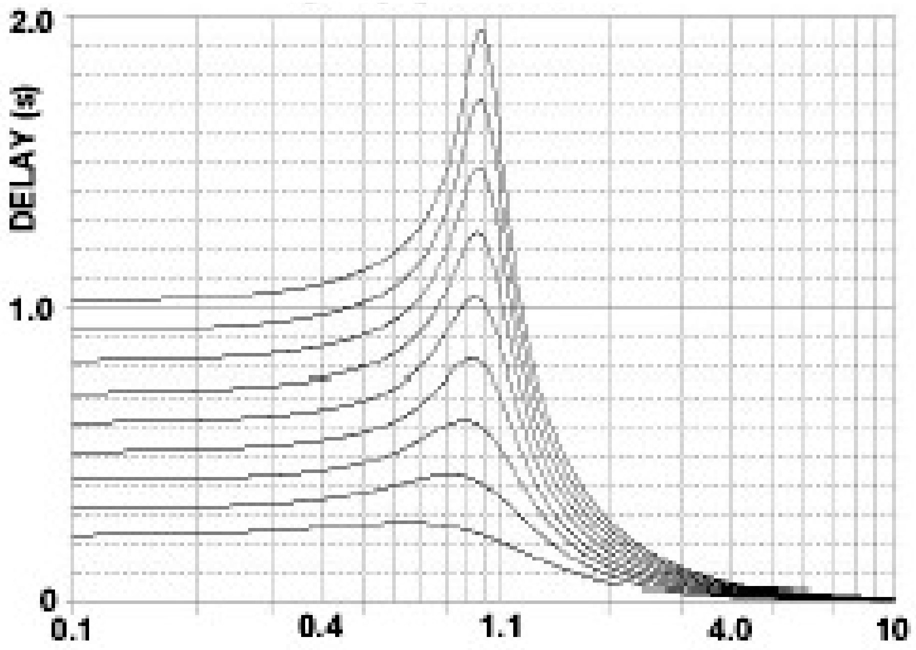
H_{dB} = cte en BF

$H_{dB} = -20\log_{10}(\omega)$ en HF



Fréquence (Hz)

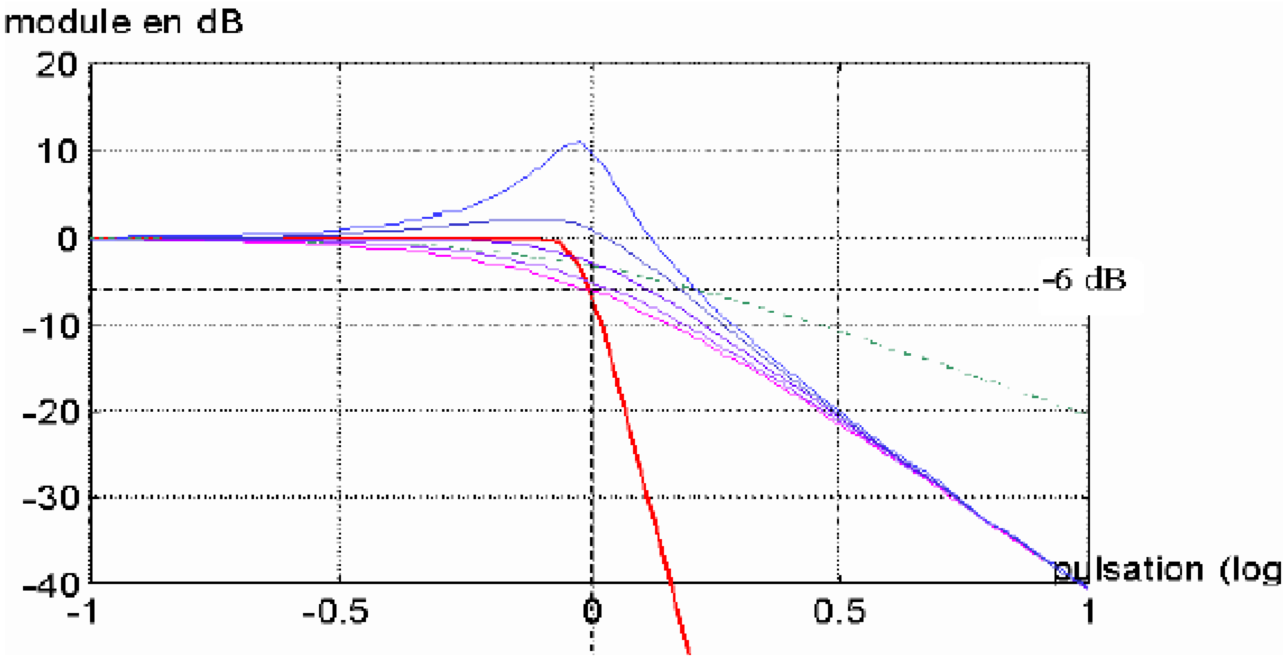
Filtre de Butterworth



Fréquence (Hz)

Filtre de Butterworth

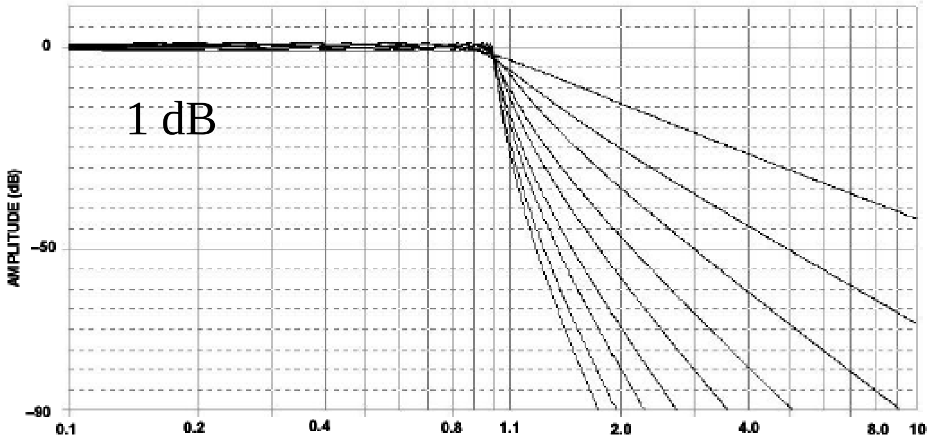
La réponse fréquentielle des filtres de Butterworth est plate en bande passante; la décomposition du dénominateur en éléments simples montre la manière dont les différents éléments d’ordre 2 et l’élément d’ordre 1 (pour n impair) contribuent à la réponse globale.



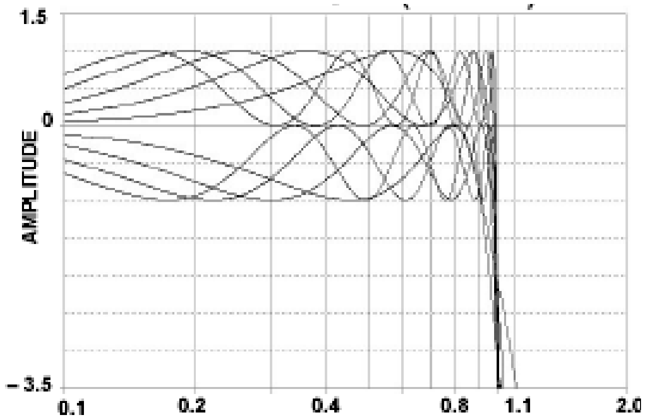
Contributions fréquentielles élémentaires à la réponse d’un filtre d’ordre 11 (5 facteurs d’ordre 2 et 1 facteur d’ordre 1).

Filtre de Chebyshev

Filtre pour lequel la pente d'atténuation dans la bande de transition est la plus grande.



Fréquence (Hz)



Fréquence (Hz)

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)} \qquad \begin{cases} T_n(x) = \cos(\arccos x) & x \leq 1 \\ T_n(x) = ch(\arg ch x) & x > 1 \end{cases}$$

L'ondulation dans la bande est liée à ε via:

$$\Delta_{dB} = 10\log(1+\varepsilon^2) \longrightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\Delta_{dB}}{10}} - 1}$$

Comportement asymptotique :

$$H_{dB} \to -20\log(\varepsilon) - 20(n-1)\log(2) - 20n\log(\omega)$$

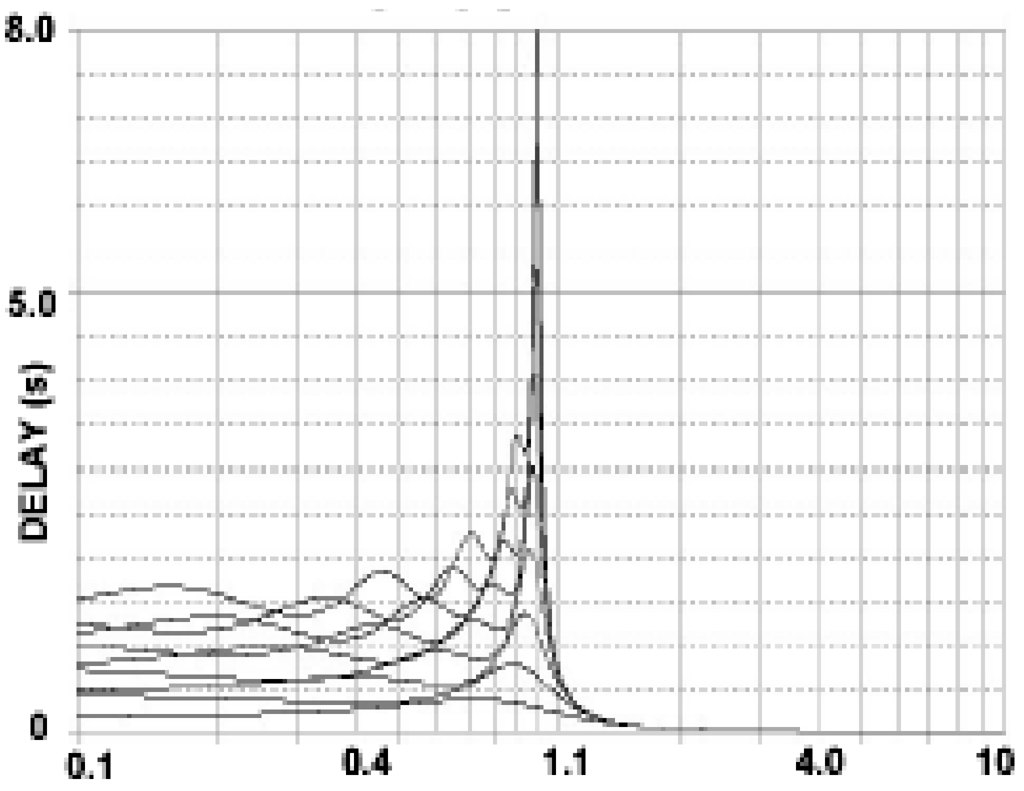
Atténuation supplémentaire / filtre de Butterworth:

$$-20\log(\varepsilon) - 6(n-1)$$

Centrale Pékin 北航中法工程师学院

centralelille

Filtre de Chebyshev

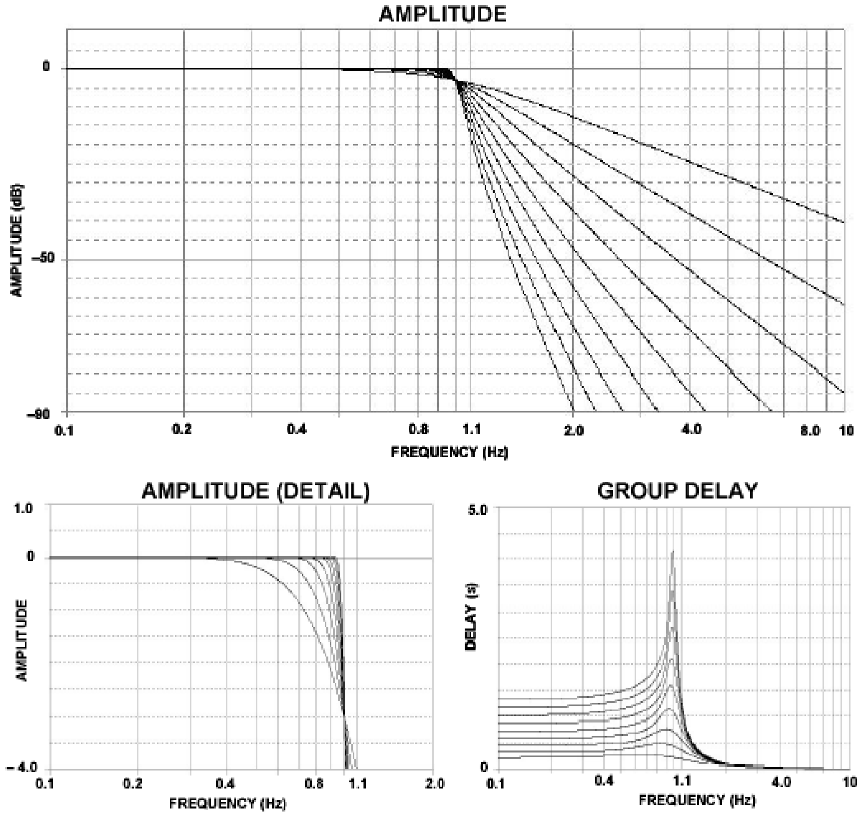


Fréquence (Hz)

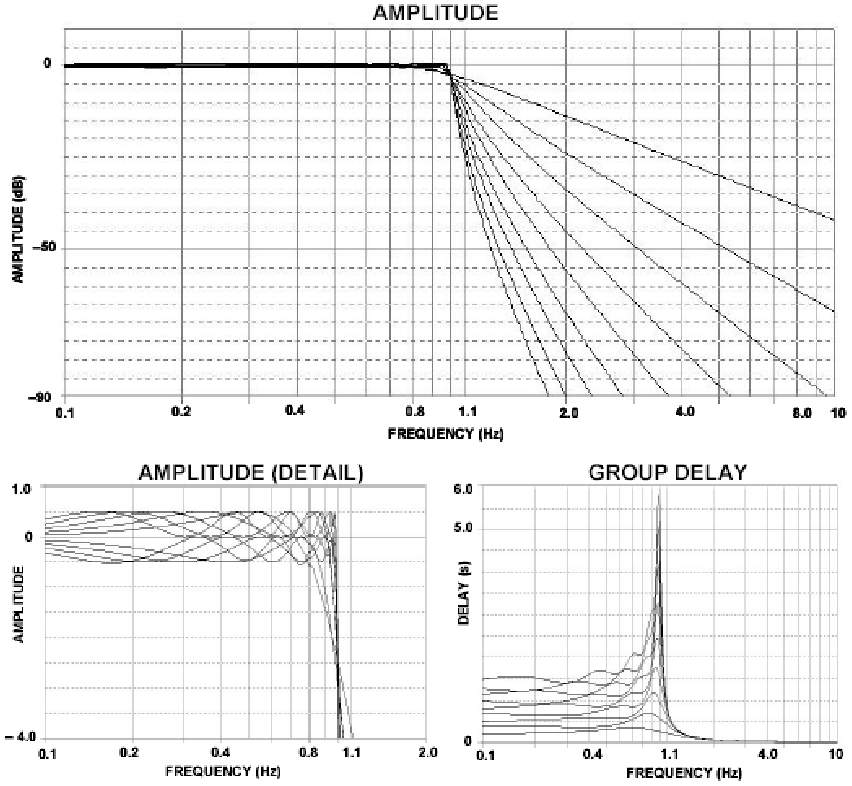
Filtre de Chebyshev

→ Atténuation la plus forte à ordre donné

Chebyshev 0.01dB



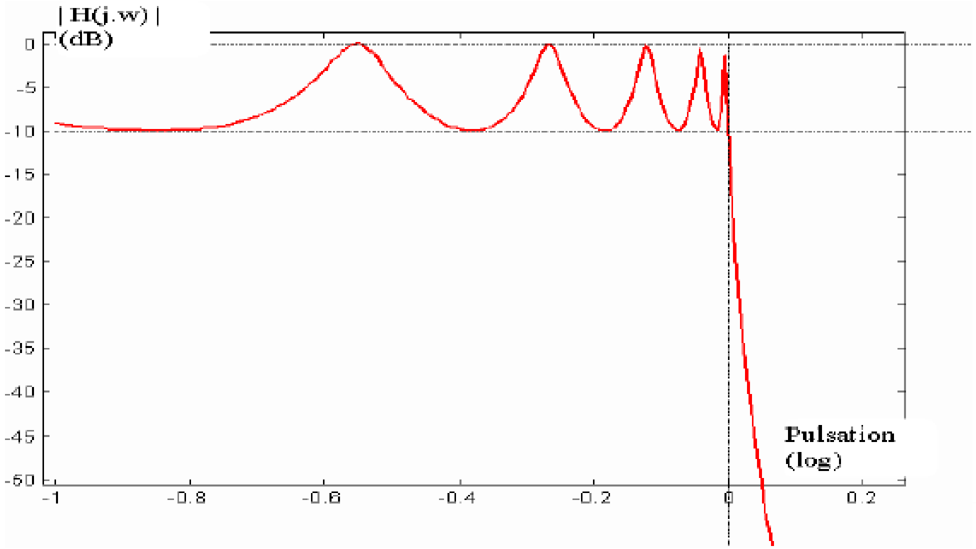
Chebyshev 0.5dB



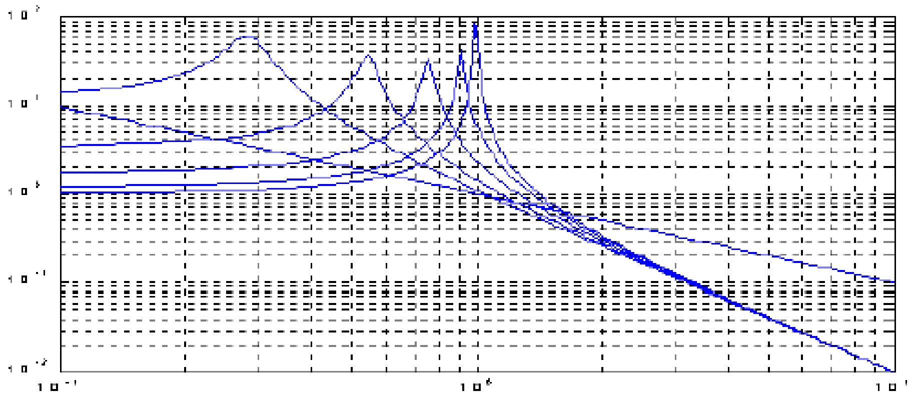
北航中法工程师学院
Centrale Pékin
centralelille

Filtre de Chebyshev

La réponse fréquentielle des filtres de Chebychev n’est plus plate en bande passante; la décomposition du dénominateur en éléments simples montre la manière dont les différents éléments d’ordre 2 et l’élément d’ordre 1 (pour n impair) contribuent à la réponse globale. Ici chaque éléments à une fréquence de coupure différente.



Réponse en fréquence d’un filtre de Chebychev d’ordre 11 et un taux d’ondulation de 10 dB

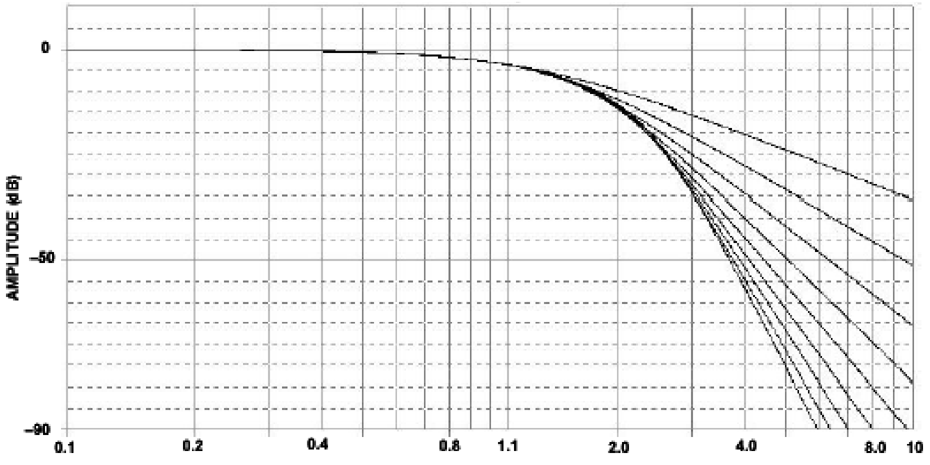


Contributions fréquentielles élémentaires à la réponse d’un filtre d’ordre 11 (5 facteurs d’ordre 2 et 1 facteur d’ordre 1).

北航中法工程师学院
Centrale Pékin
centralelille

Filtre de Bessel

Filtre pour lequel la phase dans la bande passante est la plus linéaire possible.



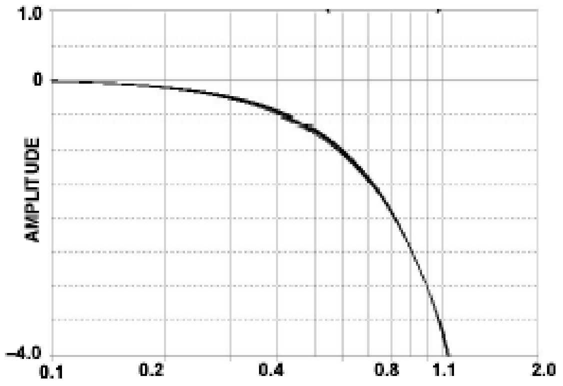
Fréquence (Hz)

$$H(p) \approx e^{-p} \quad \rightarrow \quad H(p) = \frac{1}{B_n(p)}$$

avec $B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p)$

et $B_1(p) = p + 1$ et $B_0(p) = 1$

B_n Polynôme de Bessel



Fréquence (Hz)

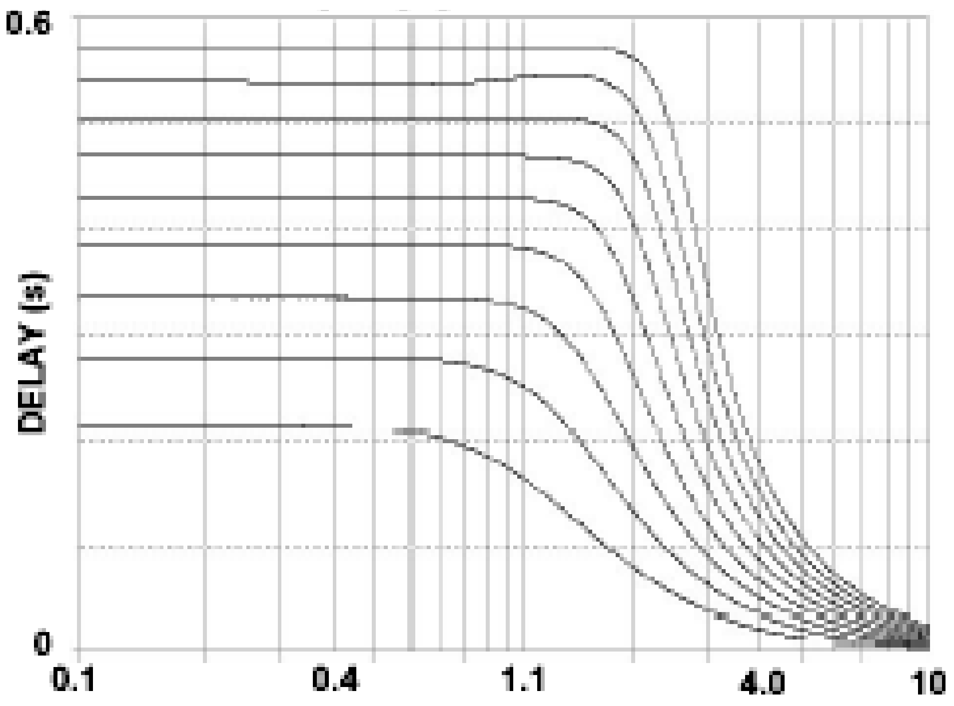
L'atténuation dans la bande est très faible est peu être approximée par :

$3(\omega)^2$ si $\omega \le 2$

et $-20\log(\omega)$ ensuite

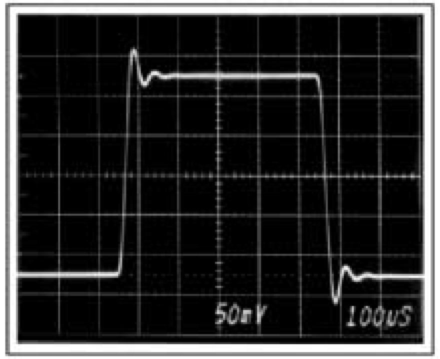
Filtre de Bessel

Filtre pour lequel la phase dans la bande passante est la plus linéaire possible.



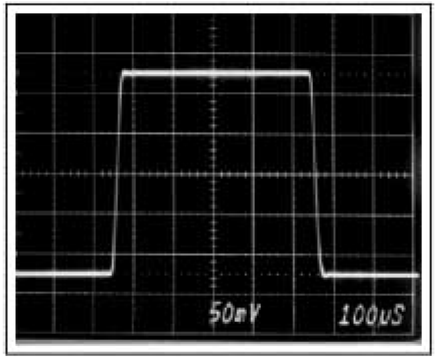
Fréquence (Hz)

Comparaison des filtres

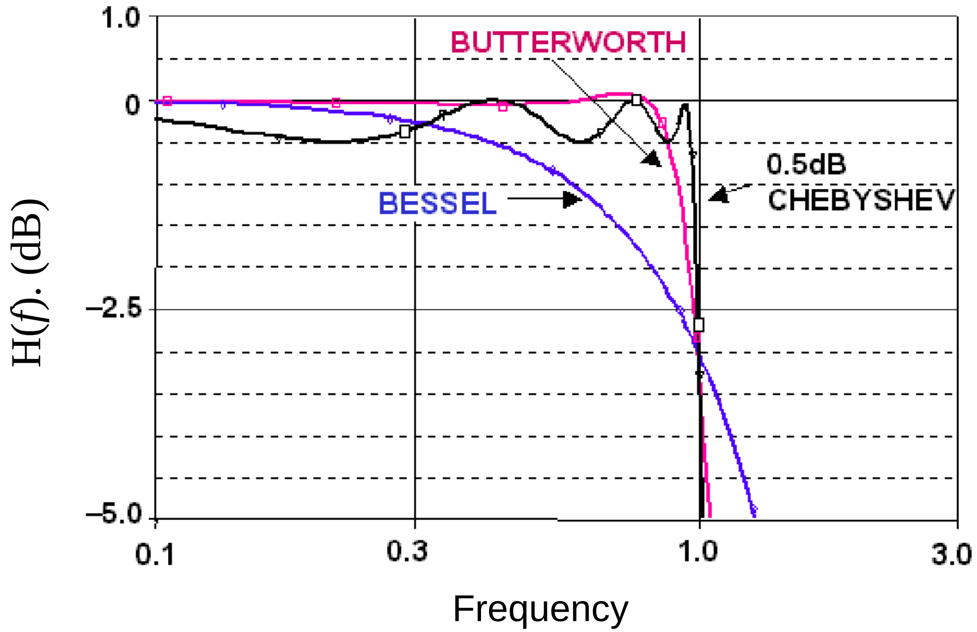


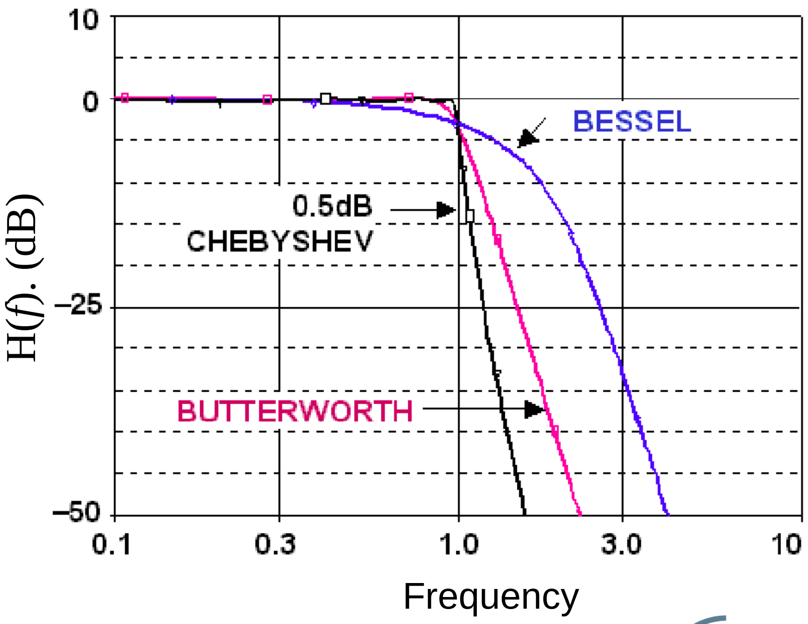
Butterworth

Chebyshev



Bessel





Comparaison des filtres

	Filtres de Butterworth	**Filtres de Chebyshev**	**Filtres de Bessel**
Avantages	• Courbe de réponse très plate dans la bande passante; • Bon temps de propagation • Calculs faciles.	• Présentent le front de coupure le plus raide pour un ordre de filtre donné.	• Présentent une phase la plus linéaire possible pour un ordre de filtre donné.
Inconvénients	• Raideur de coupure moyenne • L'atténuation dans la bande passante normalisée est toujours -3dB	• Oscillations dans la bande passante • Temps de propagation dépendant de la fréquence dans la bande passante	• Raideur de coupure faible
Ordre	$n \geq \dfrac{\ln\left(10^{b/10} - 1\right)}{2\ln(X_1)}$	$n \geq \dfrac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{-b/10}-1}{10^{-a/10}-1}}\right)}{\cosh^{-1}(X_1)}$	
Applications	• Appareils de mesure (voltmètres par exemple)	• Suppression de signaux parasites de fréquences proches des signaux utiles.	• Transmission des signaux

Exemple

Type de filtre	Passe bas
Fréquence de coupure	1 kHz
Fréquence de début de la bande d'arrêt	4 kHz
Atténuation minimale dans la bande d'arrêt	45 dB
Contrainte	Amplitude aussi plate que possible

1 Filtre de Butterworth

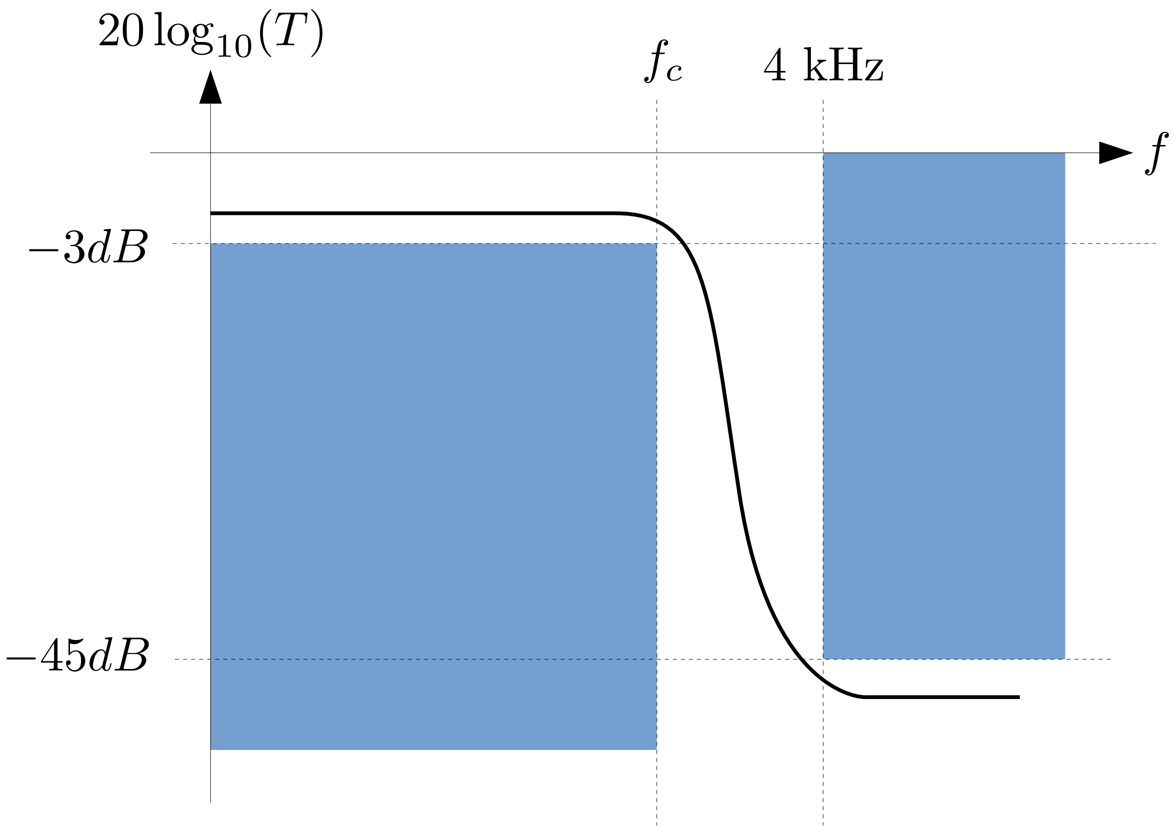
北航中法工程师学院
Centrale Pékin

centralelille

Exemple

2 $X_1 = f_1/f_0 = 4\ \text{kHz}/1\ \text{kHz} = 4$

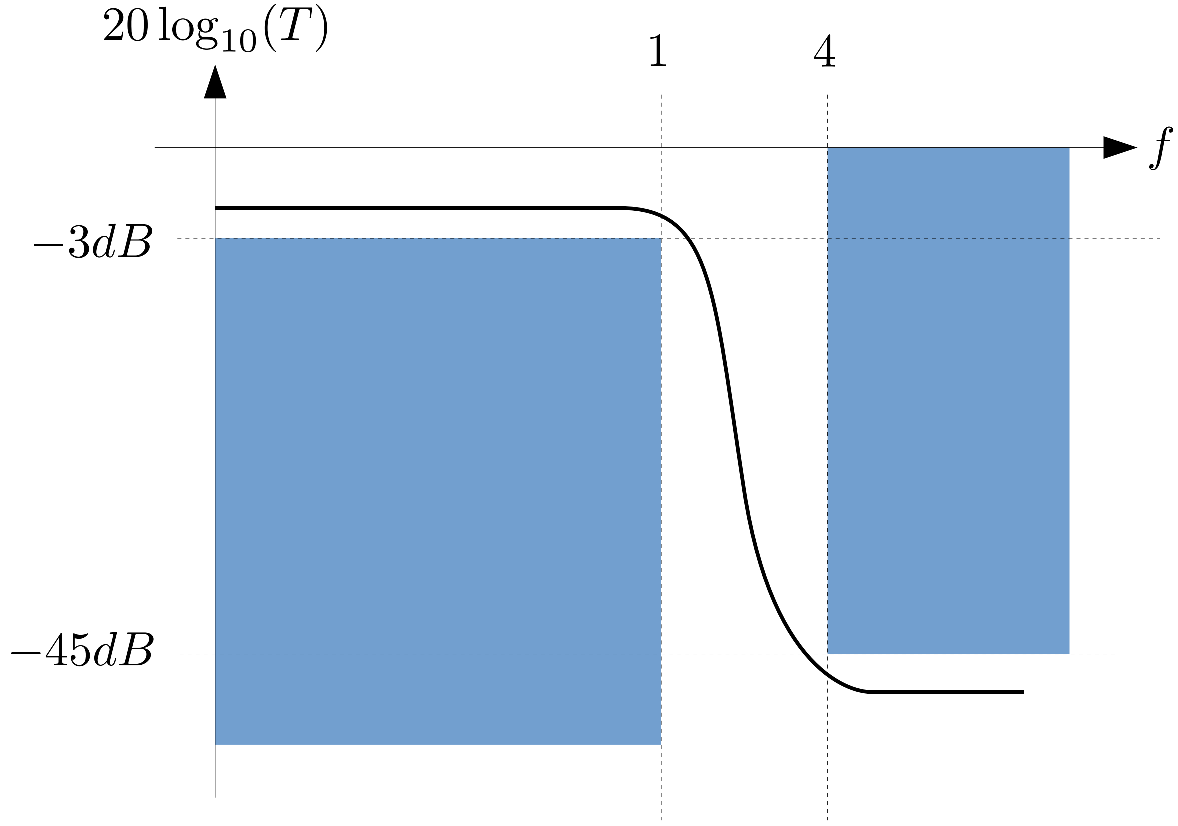
Filtre réel :



Exemple

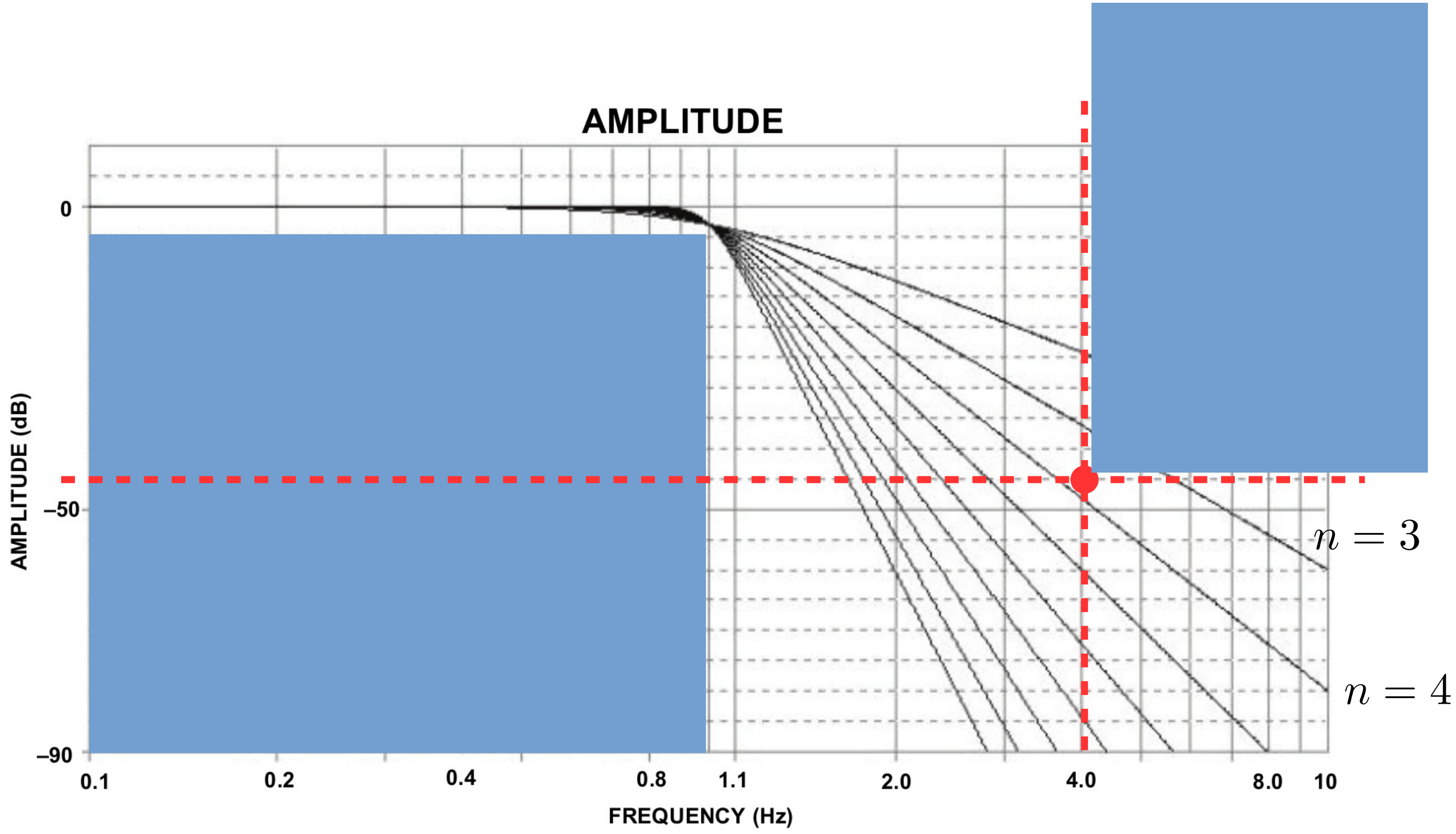
2 $X_1 = f_1/f_0 = 4 \text{ kHz}/1 \text{ kHz} = 4$

Passe bas normalisé :



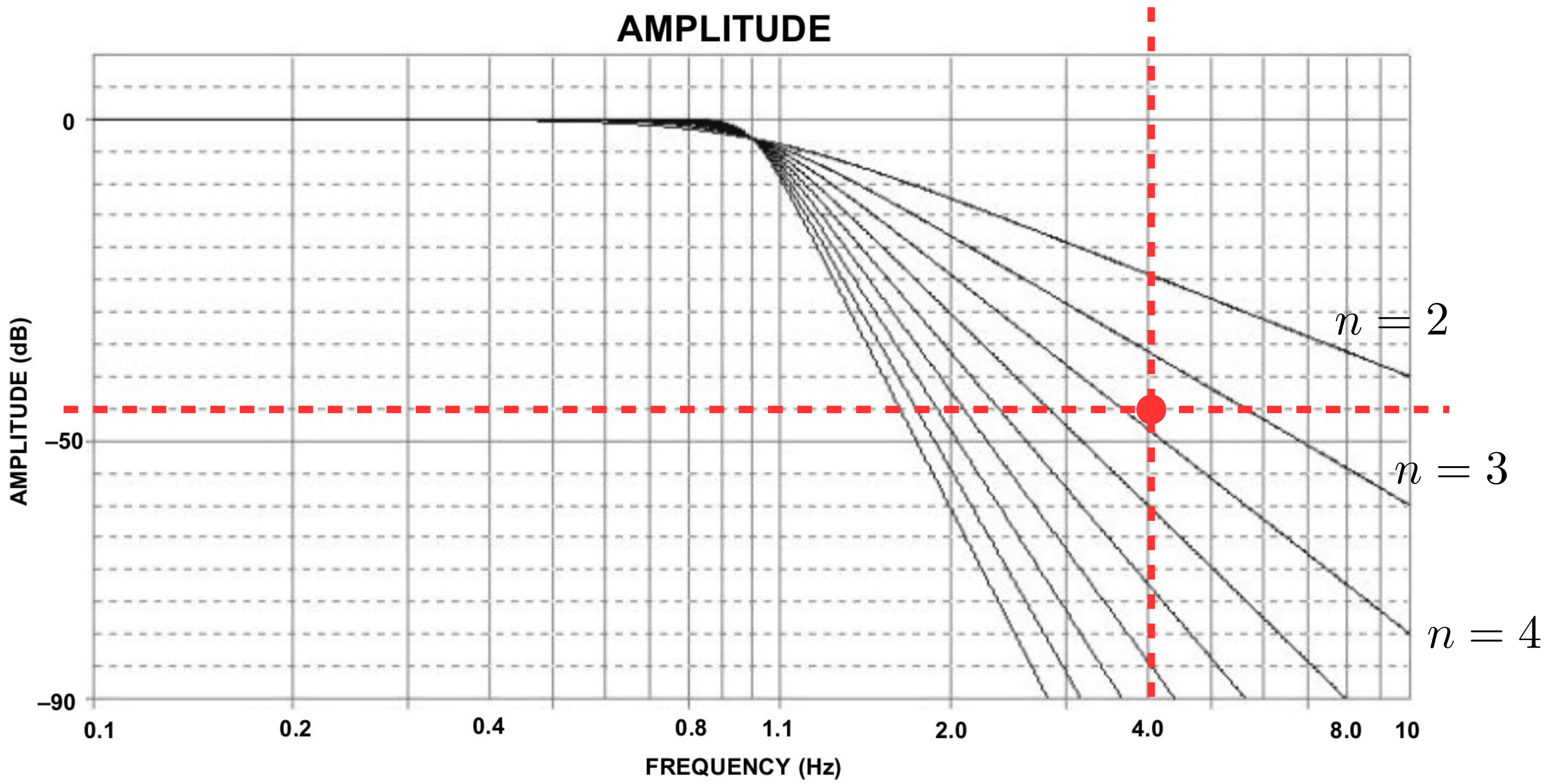
Exemple

3 Sélection de l’ordre du filtre en utilisant les abaques



Exemple

3 Sélection de l’ordre du filtre en utilisant les abaques



→ On utilise un **filtre d’ordre 4** → 2 x Filtre d’ordre 2

Exemple

4 Racines du polynôme en utilisant les tables

ORDER	SECTION	REAL PART	IMAGINARY PART	F_0	α	Q	-3 dB FREQUENCY	PEAKING FREQUENCY	PEAKING LEVEL
2	1	0.7071	0.7071	1.0000	1.4142	0.7071	1.0000		
3	1	0.5000	0.8660	1.0000	1.0000	1.0000		0.7071	1.2493
	2	1.0000		1.0000			1.0000		
4	1	0.9239	0.3827	1.0000	1.8478	0.5412	0.7195		
	2	0.3827	0.9239	1.0000	0.7654	1.3065		0.8409	3.0102
5	1	0.8090	0.5878	1.0000	1.6180	0.6180	0.8588		
	2	0.3090	0.9511	1.0000	0.6180	1.6182		0.8995	4.6163
	3	1.0000		1.0000			1.0000		
6	1	0.9659	0.2588	1.0000	1.9319	0.5176	0.6758		
	2	0.7071	0.7071	1.0000	1.4142	0.7071	1.0000		
	3	0.2588	0.9659	1.0000	0.5176	1.9319		0.9306	6.0210
7	1	0.9010	0.4339	1.0000	1.8019	0.5550	0.7449		
	2	0.6235	0.7818	1.0000	1.2470	0.8019		0.4717	0.2204
	3	0.2225	0.9749	1.0000	0.4450	2.2471		0.9492	7.2530
	4	1.0000		1.0000			1.0000		
8	1	0.9808	0.1951	1.0000	1.9616	0.5098	0.6615		
	2	0.8315	0.5556	1.0000	1.6629	0.6013	0.8295		
	3	0.5556	0.8315	1.0000	1.1112	0.9000		0.6186	0.6876
	4	0.1951	0.9808	1.0000	0.3902	2.5628		0.9612	8.3429
9	1	0.9397	0.3420	1.0000	1.8794	0.5321	0.7026		
	2	0.7660	0.6428	1.0000	1.5320	0.6527	0.9172		
	3	0.5000	0.8660	1.0000	1.0000	1.0000		0.7071	1.2493
	4	0.1737	0.9848	1.0000	0.3474	2.8785		0.9694	9.3165
	5	1.0000		1.0000			1.0000		
10	1	0.9877	0.1564	1.0000	1.9754	0.5062	0.6549		
	2	0.8910	0.4540	1.0000	1.7820	0.5612	0.7564		
	3	0.7071	0.7071	1.0000	1.4142	0.7071	1.0000		
	4	0.4540	0.8910	1.0000	0.9080	1.1013		0.7667	1.8407
	5	0.1564	0.9877	1.0000	0.3128	3.1970		0.9752	10.2023

Ordre 2 → 4 racines

$$s_1 = 0.9239 + 0.3827i$$
$$\bar{s_1} = 0.9239 - 0.3827i$$
$$s_2 = 0.3827 + 0.9239i$$
$$\bar{s_2} = 0.3827 - 0.9239i$$

Exemple

5 Polynôme du passe-bas normalisé

$$H_{PBN}(S) = \prod_i \frac{|s_i|^2}{(S - s_i)(S - \bar{s}_i)} = \left(\frac{\Omega_{PBN,1}^2}{S^2 + \frac{\Omega_{PBN,1}}{Q_{PBN,1}} S + \Omega_{PBN,1}^2} \right) \left(\frac{\Omega_{PBN,2}^2}{S^2 + \frac{\Omega_{PBN,2}}{Q_{PBN,2}} S + \Omega_{PBN,2}^2} \right)$$

$$\Omega_{PBN,1} = |s_1| \qquad \Omega_{PBN,2} = |s_2|$$

$$Q_{PBN,1} = -\frac{\Omega_{PBN,1}}{2 s_{r1}} \qquad Q_{PBN,1} = -\frac{\Omega_{PBN,2}}{2 s_{r2}}$$

Dans l’exemple :

$$\Omega_{PBN,1} = \Omega_{PBN,2} = 1$$

$$Q_{PBN,1} = 1.3065$$

$$Q_{PBN,2} = 0.541196$$

北航中法工程师学院 Centrale Pékin

centralelille

Exemple

6 Transformation de la fonction de transfert du PBN vers la fonction de transfert réelle

Pour une section **unique** :

$$H_{PBN}(S) = \frac{\Omega_{PBN}^2}{S^2 + \frac{\Omega_{PBN}}{Q_{PBN}} S + \Omega_{PBN}^2} \xrightarrow{S = s/\omega_0} H_{PB}(s) = \frac{\left(\omega_0 \Omega_{PBN}\right)^2}{s^2 + \frac{\Omega_{PBN}\omega_0}{Q_{PBN}} s + \left(\Omega_{PBN}\omega_0\right)^2}$$

$$= \frac{\Omega_{PB}^2}{s^2 + \frac{\Omega_{PB}}{Q} s + \Omega_{PB}^2}$$

Dans l'exemple :

$$f_{PB,1} = f_{PB,2} = 1 \text{ kHz}$$

$$Q_{PB,1} = 1.3065$$

$$Q_{PB,2} = 0.541196$$

$$\Omega_{PB} = \omega_0 \Omega_{PBN} \quad Q = Q_{PBN}$$

Synthèse : méthode

Cahier des charges

Normalisation et transposition
→ Passe-bas normalisé (PBN)

Choix du type de réponse :
Butterworth, Chebyshev, Bessel

Chox de la structure :Passif ou actif

Détermination des polynômes en utilisant les tables (1^{er} et $2^{ème}$ ordre)

$$H_{LPN}(S) = \prod_i \frac{|s_i|^2}{(S - s_i)(S - \bar{s}_i)}$$

Structure électronique physique

Calcul de la fonction de transfert (forme canonique)

Exemple : Filtre passe-bas du $2^{ème}$ ordre

$$H_{\mathrm{real}}(s) = \frac{K\Omega_{0,\mathrm{real}}^2}{s^2 + \frac{\Omega_{0,\mathrm{real}}}{Q_{\mathrm{real}}}s + \Omega_{0,\mathrm{real}}}$$

$$K, Q_{\mathrm{real}}, \Omega_{0,\mathrm{real}} = f(R_i, C_i)$$

Identification des paramètres → R_i, C_i

Calcul de la fonction de transfert réelle
→ Dé-normalisation

北航中法工程师学院
Centrale Pékin

centralelille

centralelille

AUDACE • EXIGENCE • RESPECT