Feuille de TD n° 5

Probabilités conditionnelles

2 avril 2020

Exercice 1. Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

On a $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse $\mathbb{P}(A) = p$ Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{p}{N}$$

On doit donc calculer

$$\mathbb{P}(A_n | \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1})$$

Mais

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = 1 - \frac{p(N-1)}{N} = \frac{N - p(N-1)}{N}$$

et

$$\mathbb{P}(A_n \cap \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_n | \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}$$

Exercice 3. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

---

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que
$$\mathbb{P}(I_{n+1}) = \mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)\mathbb{P}(I_n) + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})\mathbb{P}(\overline{I_n}).$$
Mais, $\mathbb{P}(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $\mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1-p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que
$$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$
2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie
$$l = (2p-1) \times l + (1-p) \iff l = 1/2.$$
On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,
$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$
On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que
$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$
3. On distingue alors trois cas :
   - Si $p=1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.
   - Si $p=0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.
   - Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale !

Exercice 4. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard.

1. Quel est l'univers Ω ?
2. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$.
3. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire.
4. En déduire la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai.
5. Retrouver directement ce résultat grâce à un argument d'équiprobabilité.

---

1. On numérote les clefs de 1 à n et note l le numéro de la clef qui ouvert la porte. L'univers est alors l'ensemble des suites $(i_1, \dots, i_k)$ de numéros deux à deux distincts tels que $i_k = l$.
2. L'événement E_1 est réalisé si la première clef choisie n'est pas la bonne. On a donc
$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n-1}{n}$$
De même, l'événement $E_1 \cap E_2$ est réalisé si les deux premières clefs choisies ne sont pas la bonne. On a
$$\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1)} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-2}{n-1}.$$
3. L'événement S_k est réalisé si pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, E_j est réalisé et $\overline{E}_k$ est réalisé. On a donc :
$$S_k = E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k.$$
4. On a :
$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{P}(S_k) \\ &= \mathbb{P}(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k) \\ &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) \ldots \mathbb{P}(E_{k-1} \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-2})\mathbb{P}(\overline{E}_k \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \\ &= \tfrac{n-1}{n}\tfrac{n-2}{n-1} \cdots \tfrac{n-k+1}{n-k+2}\tfrac{1}{n-k+1} \\ &= \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$
5. On modifie l'expérience. On tire toute les clefs en conservant l'ordre dans lequel on tire ces clefs. L'univers contient alors $n!$ éléments. Un réslutat $(i_1, \dots, i_n)$ réalise S_k si $i_k = l$. Il y a donc $(n-1)!$ cas favorables pour $n!$ possibles. On obtient donc de nouveau l'égalité :
$$u_k = \frac{1}{n}$$

Exercice 5 (*E.M.S. mai 2017*)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $(1-p)$ de dés honnêtes et une proportion p de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance n fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité u_n que le dé soit malhonnête ?
4. Étudier la limite de la suite u_n.

On note A l'événement « le dé lancé donne un 6 » et B l'événement « le dé lancé est malhonnêtes ».

1. On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A \mid \bar{B}) \\ &= p\tfrac{1}{2} + (1-p)\tfrac{1}{6} \\ &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{p}{3} \end{aligned}$$
2. On peut utiliser la formule de Bayes. On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{3p}{2p+1} \end{aligned}$$
3. On note A_n l'événement « on lance n fois le dé choisi et on obtient à chaque fois 6 ». On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_n \mid B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A_n \mid \bar{B}) \\ &= p\tfrac{1}{2^n} + (1-p)\tfrac{1}{6^n} \\ &= \tfrac{p(3^n-1)+1}{6^n} \end{aligned}$$
On obtient donc
$$\begin{aligned} u_n = \mathbb{P}(B \mid A_n) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_n \mid B)}{\mathbb{P}(A_n)} \\ &= \frac{p\frac{1}{2^n}}{\frac{p(3^n-1)+1}{6^n}} \\ &= \frac{p3^n}{p(3^n-1)+1} \end{aligned}$$
4. La limite quand n tend vers $+\infty$ de u_n est égale à 1.

Exercice 6. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Pour $n \geq 4$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

---

1. On a $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = \dfrac{7}{8}$.
2. On note P_i l'événement on obtient pile lors du i-ème lancer. $F_i = \overline{P_i}$.
Soit A_n l'événement : ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n = &= \mathbb{P}(A_n|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap F_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap P_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \end{aligned}$$
On en déduit $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}p_{n-3}$.
3. On pourrait calculer les racines de l'équation caractérique pour trouver p_n puis la limite. Mais il est plus efficace de chercher les points fixe : il vient $l = 0$.
Pour s'assurer que (p_n) est effectivement convergente, il est clair qu'elle est décroissante et minorée.