Feuille de TD n° 6

Variables aléatoires

9 avril 2020

Exercice 1. Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, ... , n,... . On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres, et que $\mathbb{P}(n\text{-ième saut}) = \frac{1}{n}$. Soit X le dernier saut réussi. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

Si $X_i = 1$ si le i-ème saut est réussi et 0 sinon, alors

$$(X = k) = \cap_{i=1}^{k}(X_i = 1) \cap (X_{k+1} = 0) = .$$

On calcule

$$\mathbb{P}(X = k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On peut calculer la fonction génératrice G_X de X :

$$\begin{aligned}
G_X(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)s^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}s^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{(k+1)!}s^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}s^k \\
&= (e^s - 1) - \frac{1}{s}(e^s - 1 - s) \\
&= (1 - \frac{1}{s})e^s + \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

On calcule $G'_X(s) = (1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})e^s - \frac{1}{s^2}$. Donc l'espérance existe et vaut $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = e - 1$.
De même, la variance existe et vaut $\mathrm{Var}\,(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = 3e - e^2$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On définit une fonction Y par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

---

1. Y est à valeurs discrète car $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega)$ et est donc au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
2. Pour tout $y \in E$,

$$\begin{aligned}
Y^{-1}(\{y\}) &= \{\omega \in \Omega \mid X_{N(\omega)}(\omega) = y\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big((N = n) \cap (X_n = y) \Big)
\end{aligned}$$

Par stabilité d'une tribu par union et intersection dénombrable, $Y^{-1}(\{y\})$ appartient bien à la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 3. Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(T > n) > 0.$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n | T \geq n).$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

1. Justifier
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \theta_n \in [0, 1[.$$
2. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $\mathbb{P}(T \geq n)$.
En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.
3. Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \theta_n \in [0, 1[$ et $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

---

1. Par définition d'une probabilité, $\theta_n \in [0, 1]$.
Si pour $n_0 \in \mathbb{N}$, $\theta_{n_0} = 1 = \mathbb{P}(T = n_0 | T \geq n_0)$, alors $\mathbb{P}(T = n_0) = \mathbb{P}(T \geq n_0)$ et donc $\mathbb{P}(T > n_0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
2. On a $\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T \geq n + 1)$ et $\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \mathbb{P}(T \geq n)$.
Donc
$$\mathbb{P}(T \geq n+1) = (1 - \theta_n)\mathbb{P}(T \geq n) \Longrightarrow \mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \theta_k)\mathbb{P}(T \geq 0)$$
Comme T est à valeur dans $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$, d'où
$$\mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \theta_k)$$
Par limite décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
On en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \theta_k)$ tend vers $-\infty$.
Soit (θ_n) ne tend pas vers 0, et alors la série $\sum \theta_n$ tend vers $+\infty$, soit (θ_n) tend vers 0, mais alors $\ln(1 - \theta_n) \sim -\theta_n$ et par comparaison entre suite de signe constant, $\sum \theta_n$ tend encore vers $+\infty$, comme séire divergente à termes positifs.
3. S'il existe une telle variable aléatoire T, d'après ce qui précède,
$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \theta_k).$$
Il faut montrer que $\sum\limits_n \mathbb{P}(T = n) = 1$ et que $\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \mathbb{P}(T \geq n)$.
   (a) On montre par récurrence que
   $$\mathbb{P}(T \leq n) = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1 - \theta_k)$$
   et l'hypothèse est équivalente à $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1 - \theta_k) = 0$.
   (b) L'événement complémentaire donne la seconde partie.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X (*i.e.* calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) dans les cas suivants :

1. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{4}{n+1} P(X = n).$$
2. On suppose que X ne s'annule pas et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P(X = n) = p \cdot P(X \geq n).$$

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P(X=n) = P(X=0)\frac{4^n}{n!}.$$
En utilisant à nouveau le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=0)\frac{4^n}{n!} = 1$ on obtient
$$P(X=n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$
Donc X suit une loi de poisson de paramètre 4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$P(X=n) - P(X=n+1) = p \cdot P(X \geq n) - p \cdot P(X \geq n+1) = p \cdot P(X=n)$$
D'où la relation de récurrence
$$P(X=n+1) = (1-p)P(X=n).$$
Par récurrence $P(X=n) = (1-p)^{n-1}P(X=1)$.
Enfin, on a l'égalité :
$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}P(X=1) = \frac{P(X=1)}{p}.$$
D'où
$$P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$$
Donc X suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 5 (*Le problème du collectionneur*)**.** Chaque paquet de lessive de la marque *Bonus* contient un cadeau, choisi au hasard parmi n cadeaux équiprobables. On note S_k le nombre de paquets achetés jusqu'à obtenir k cadeaux différents. (Par suite $S_1 = 1$ et, pour chaque $k \geqslant 2$, S_k est une variable aléatoire.)
1. Pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, soit $X_k = S_k - S_{k-1}$. Déterminer la loi de probabilité de X_k.
2. En déduire l'espérance $E(S_n)$ et montrer que $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

---

1. Pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire $X_k = S_k - S_{k-1}$ est le temps d'attente d'un succès. On appelle succès : obtenir un cadeau différent des $k-1$ cadeaux déjà obtenus. La probabilité d'un succès est donc $p_k = \dfrac{n-(k-1)}{n}$ et la variable aléatoire X_k suit une loi géométrique de paramètre p_k.
2. $S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 = 1 + \sum_{k=2}^{n} X_k$. D'où $E(S_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} E(X_k)$. Or $E(X_k) = \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{n}{n-(k-1)}$. D'où $E(S_n) = 1 + \dfrac{n}{n-1} + \dfrac{n}{n-2}\cdots + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{1} = n \cdot H_n$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n} \sim \ln n$ (le démontrer en comparant série et intégrale).
Donc $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

Exercice 6. On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.
1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

---

1. Pour $i = 1, \dots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   - A : $U_1 = i$ et $U_2 = i$;
   - B : $U_1 = i$ et $U_2 > i$;
   - C : $U_1 > i$ et $U_2 = i$.

   Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2, on en déduit que
$$P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } P(C) = \frac{6-i}{36}.$$
Il vient $P(X=1) = 11/36$, $P(X=2) = 9/36$, $P(X=3) = 7/36$, $P(X=4) = 5/36$, $P(X=5) = 3/36$, $P(X=6) = 1/36$. On en déduit $E(X) = 91/36$.
2. On a $X + Y = U_1 + U_2$ car (U_1, U_2) est une permutation de (X, Y). Il vient $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = E(U_1) + E(U_2) = 7$, puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2 = 7/2$. On en déduit $E(Y) = 161/36$.
3. On a $XY = U_1U_2$. On en déduit
$$E(XY) = E(U_1U_2) = E(U_1)E(U_2)$$
par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1225}{1296}.$$