

# FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 4

## Dynamique du point matériel

École Centrale Pékin

Année 1

### Table des matières

<b>4 Exemples d'études de dynamique du point</b>	<b>2</b>
4.1 Méthode . . . . .	2
4.2 Exemple 1 : La chute libre . . . . .	2
4.3 Exemple 2 : Le tir balistique avec frottement . . . . .	3
4.4 Exemple 3 : Mouvement d'une masse accrochée à un ressort . . . . .	6



5. Résoudre l'équation du mouvement à l'aide des conditions initiales

6. Quelle est la durée de la chute et la vitesse au moment où le point touche le sol ?

### 4.3 Exemple 2 : Le tir balistique avec frottement

#### 4.3.1 Equation du mouvement

On considère un objet assimilable à un point matériel lancé (发射的) avec une vitesse initiale  $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$  faisant un angle  $\alpha$  avec le sol. L'air applique une force de frottement linéaire  $\vec{F}_\lambda = -\lambda \vec{v}$  sur l'objet.

1. Préciser le système d'étude et le référentiel choisi
2. Faire un schéma et choisir le système de coordonnées adaptées au mouvement. Préciser les conditions initiales
3. Établir le bilan des forces s'exerçant sur le système étudié.
4. Appliquer le PFD pour déterminer l'équation vérifiée par la vitesse.

### 4.3.2 Résolution des équations différentielles (微分方程) linéaire du premier ordre à coefficients constants

Nous rencontrons très souvent en physique des équations différentielles, ce sont des équations qui relient une fonction à ses dérivées.

Nous allons voir comment résoudre les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant, c'est-à-dire reliant une fonction à sa dérivée première avec des coefficients constants.

Soit une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant :

$$af'(x) + bf(x) = g(x) \quad \text{avec} \quad \{a, b\} \in \mathbb{R}$$

$g(x)$  une fonction sans lien avec  $f(x)$

1. On cherche d'abord une solution de **l'équation homogène** (齐次方程) (sans second membre) :

$$af'_H(x) + bf_H(x) = 0$$

Les solutions sont de la forme :

$$f_H(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x}$$

2. Il faut ensuite trouver une **solution particulière**. En physique la solution particulière (特解) sera **toujours de la forme du second membre**.

Ici nous allons seulement voir le cas le plus fréquent c'est à dire quand le second membre est constant. On pose  $g(x) = c$  et on cherche une fonction **constante**  $f_{sp}$  qui vérifie l'équation :

$$af'_{sp} + bf_{sp} = c \quad \text{avec} \quad \{a, b, c\} \in \mathbb{R}$$

on a donc :

$$f_{sp} = \frac{c}{b}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent finalement :

$$f(x) = f_H(x) + f_{sp} = Ae^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$$

4. Il reste dans  $f(x)$  une constante  $A$  qui n'a pas encore été déterminée (c'est pour cela qu'on parle pour l'instant "des" solutions de l'équation différentielle.

Pour la déterminer on utilise une condition initiale ou condition aux limites donnée par le problème, en général :

$$f(0) = \dots \quad \text{ou} \quad f'(0) = \dots$$

Remarque : Ici la dérivée de  $f$ ,  $f'$ , a été choisie pour l'exemple comme une dérivée par rapport à  $x$ , si la dérivée est par rapport à une autre variable,  $t$  par exemple, les résultats sont identiques en remplaçant  $x$  par la nouvelle variable

**4.3.3 Résolution du problème du tir balistique**

1. Résoudre l'équation de la vitesse obtenue en 4.3.1 et déterminer les composantes  $v_x(t)$ ,  $v_z(t)$  du vecteur vitesse  $\vec{v}$  à tout instant.

2. Déterminer l'instant où l'objet atteint son altitude (海拔高度) maximale



## 4.4.2 Résolution d'équation différentielles linéaire du second ordre à coefficients constant

Soit une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x) \quad \text{avec} \quad \{a, b, c\} \in \mathbb{R}$$

$g(x)$  une fonction sans lien avec  $f(x)$

1. On cherche d'abord une solution de l'**équation homogène** (sans second membre) :

$$af_H''(x) + bf_H'(x) + cf_H(x) = 0$$

Pour cela on résout l'**équation caractéristique**  $ar^2 + br + c = 0$ , c'est une équation du second degré où  $f_H''(x)$  est remplacé par  $r^2$ ,  $f_H'(x)$  par  $r$ , et  $f_H(x)$  par 1.

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

les solutions de l'équation du second degré sont :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \left( A \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x\right) \right) \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  (cas le plus fréquent)

les solutions de l'équation du second degré sont :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right) \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

où au choix

$$f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + \varphi\right) \right) \quad \text{avec} \quad \{A, \varphi\} \in \mathbb{R}$$

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

la solution de l'équation du second degré est :

$$r = -\frac{b}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$f_H(x) = (A + Bx)e^{-\frac{b}{2a}x} \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

2. Il faut ensuite trouver une **solution particulière**. En physique la solution particulière sera **toujours de la forme du second membre**.

Ici nous allons seulement voir le cas le plus fréquent c'est à dire quand le second membre est constant. On pose donc  $g(x) = d$  et on cherche une constante  $f_{sp}$  qui vérifie l'équation  $af''_{sp} + bf'_{sp} + cf_{sp} = d$ , on a donc :

$$f_{sp} = \frac{d}{c}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent finalement :

$$f(x) = f_H(x) + f_{sp}$$

4. Il existe dans  $f(x)$  des constantes  $\{A, B\}$  ou  $\{A, \varphi\}$  qui n'ont pas encore été déterminées (c'est pour cela qu'on parle pour l'instant "des" solutions de l'équation différentielle).

Pour les déterminer on utilise les conditions initiales ou conditions aux limites données par le problème. Pour deux constantes inconnues il faut deux équations, en général :

$$f(0) = \dots \quad \text{et} \quad f'(0) = \dots$$

Remarque : Ici les dérivées de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$ , ont été choisies pour l'exemple comme des dérivées par rapport à  $x$ , si la dérivée est par rapport à une autre variable,  $t$  par exemple, les résultats sont identiques en remplaçant  $x$  par la nouvelle variable.

Remarque : La solution générale de l'équation homogène s'écrit de manière générale :

$$f_H(x) = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$$

pour  $\Delta > 0$  comme pour  $\Delta < 0$ . Le fait que  $r_1$  et  $r_2$  soient réels dans un cas et complexes dans l'autre amène aux deux solutions différentes proposées.

#### 4.4.3 Résolution du problème de la masse accrochée au ressort

1. Dans un premier cas on néglige les frottements fluides. Faire apparaître la grandeur  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  dans l'équation différentielle et déterminer l'expression de la position de la masse  $x(t)$  en fonction du temps.

2. On prend en compte maintenant les frottements fluides. Faire apparaître la grandeur  $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$  dans l'équation différentielle et déterminer l'expression de la position de la masse  $x(t)$  en fonction du temps dans le cas où  $Q > \frac{1}{2}$ .