FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 4

Dynamique du point matériel

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

4 Exemples d'études de dynamique du point

4.1 Méthode

1. Préciser le système (fermé) d'étude et le référentiel (galiléen) choisi
2. Faire un schéma et choisir le système de coordonnées adaptées au mouvement. Préciser les conditions initiales
3. Établir le bilan des forces (受力分析) s'exerçant sur le système étudié.
4. Choisir la méthode de résolution :
   - PFD : On projette (投影) le principe fondamental sur les axes du mouvement
     $\longrightarrow$ Très efficace pour l'étude des mouvement de translation.
   - Energie : cf chapitre futur.
     $\longrightarrow$ Très efficace pour les mouvements à une seule dimension.
   - Théorème du moment cinétique : cf chapitre futur.
     $\longrightarrow$ Très efficace pour les mouvement de rotation.
5. Résoudre les équations obtenues à l'aide des conditions initiales

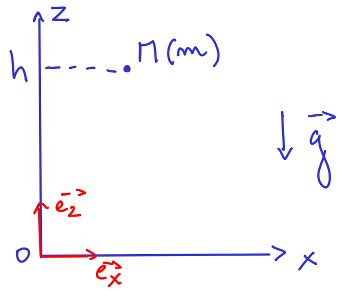
4.2 Exemple 1 : La chute libre

On considère un point matériel M de masse m lâché (松开) sans vitesse initiale d'une hauteur h.

1. Préciser le système d'étude et le référentiel choisi

On étudie le point matériel M(m) dans le référentiel du sol

2. Faire un schéma et choisir le système de coordonnées adaptées au mouvement. Préciser les conditions initiales



On $\begin{cases} z(0) = h \\ v(0) = 0 \end{cases}$

3. Établir le bilan des forces s'exerçant sur le système étudié.

Seul le poids s'applique au point matériel : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

4. Appliquer le PFD pour déterminer l'équation du mouvement (运动方程)

On applique le PFD au point matériel : $m\vec{a} = -mg\vec{e_z}$

On projette sur l'axe du mouvement, Oz : $\boxed{\ddot{z} = -g}$

5. Résoudre l'équation du mouvement à l'aide des conditions initiales

On primitive l'équation du mouvement : $\dot{z}(t) = -gt + A$, or $\dot{z}(0) = 0$ donc $A = 0$

$z(t) = -g\frac{t^2}{2} + B$, or $z(0) = h$ donc $\boxed{z(t) = h - \frac{gt^2}{2}}$

6. Quelle est la durée de la chute et la vitesse au moment où le point touche le sol ?

Soit t_c la durée de la chute : $z(t_c) = 0 = h - \frac{gt_c^2}{2}$

d'où $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$. De plus $\boxed{\|\vec{V}(t_c)\| = -\dot{z}(t_c) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}}$

4.3 Exemple 2 : Le tir balistique avec frottement

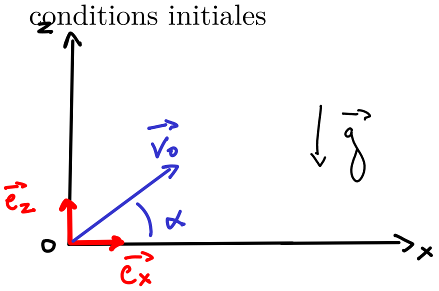
4.3.1 Equation du mouvement

On considère un objet assimilable à un point matériel lancé (发射的) avec une vitesse initiale $v_0 = 5\ m.s^{-1}$ faisant un angle α avec le sol. L'air applique une force de frottement linéaire $\vec{F}_\lambda = -\lambda\vec{v}$ sur l'objet.

1. Préciser le système d'étude et le référentiel choisi

On étudie l'objet de M(m) dans le référentiel du sol

2. Faire un schéma et choisir le système de coordonnées adaptées au mouvement. Préciser les conditions initiales



On utilise les coordonnées cartésiennes

$\vec{V}(0) = \vec{V_0}$

$\begin{cases} x(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

3. Établir le bilan des forces s'exerçant sur le système étudié.

Deux forces s'appliquent, le poids et les frottements fluides

$\vec{P} = m\vec{g}$ et $\vec{F_\lambda} = -\lambda\vec{v}$

4. Appliquer le PFD pour déterminer l'équation vérifiée par la vitesse.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

Nous allons voir comment la résoudre

4.3.2 Résolution des équations différentielles (微分方程) linéaire du premier ordre à coefficients constants

Nous rencontrons très souvent en physique des équations différentielles, ce sont des équations qui relient une fonction à ses dérivées.

Nous allons voir comment résoudre les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant, c'est-à-dire reliant une fonction à sa dérivée première avec des coefficients constants.

Soit une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant :

$$af'(x) + bf(x) = g(x) \qquad \text{avec} \qquad \{a, b\} \in \mathbb{R}$$

g(x) une fonction sans lien avec f(x)

1. On cherche d'abord une solution de **l'équation homogène** (齐次方程) (sans second membre) :

   $$af'_H(x) + bf_H(x) = 0$$

   Les solutions sont de la forme :

   $$f_H(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x}$$

2. Il faut ensuite trouver une **solution particulière**. En physique la solution particulière (特解) sera **toujours de la forme du second membre.**

   Ici nous allons seulement voir le cas le plus fréquent c'est à dire quand le second membre est constant. On pose $g(x) = c$ et on cherche une fonction **constante** f_{sp} qui vérifie l'équation :

   $$af'_{sp} + bf_{sp} = c \qquad \text{avec} \qquad \{a, b, c\} \in \mathbb{R}$$

   on a donc :

   $$f_{sp} = \frac{c}{b}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent finalement :

   $$f(x) = f_H(x) + f_{sp} = Ae^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$$

4. Il reste dans $f(x)$ une constante A qui n'a pas encore été déterminée (c'est pour cela qu'on parle pour l'instant "des" solutions de l'équation différentielle.

   Pour la déterminer on utilise une condition initiale ou condition aux limites donnée par le problème, en général :

   $$f(0) = ... \quad \text{ou} \quad f'(0) = ...$$

Remarque : Ici la dérivée de f, f', a été choisie pour l'exemple comme une dérivée par rapport à x, si la dérivée est par rapport à une autre variable, t par exemple, les résultats sont identiques en remplaçant x par la nouvelle variable

4.3.3 Résolution du problème du tir balistique

1. Résoudre l'équation de la vitesse obtenue en 4.3.1 et déterminer les composantes $v_x(t)$, $v_z(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ à tout instant.

On peut résoudre directement l'équation différentielle sous forme vectorielle :

Equation homogène : $\frac{d\vec{V}_H(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{V}_H(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_H(t) = \vec{A}\,e^{-\frac{\lambda}{m}t}$

Solution particulière : $\frac{d\vec{V}_{sp}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{V}_{sp} = \vec{g}$ or $\frac{d\vec{V}_{sp}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{V}_{sp} = \frac{m\vec{g}}{\lambda}$

Solutions : $\vec{V}(t) = \vec{V}_H(t) + \vec{V}_{sp} = \vec{A}\,e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{m\vec{g}}{\lambda}$

Conditions initiales : à $t=0$, $\vec{V}(0) = \vec{V}_0$ donc $\vec{A} + \frac{m\vec{g}}{\lambda} = \vec{V}_0$ et $\vec{A} = \vec{V}_0 - \frac{m\vec{g}}{\lambda}$

Solution : Finalement : $\boxed{\vec{V}(t) = \left(\vec{V}_0 - \frac{m\vec{g}}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{m\vec{g}}{\lambda}}$

On a $\vec{V}_0 = V_0\cos\alpha\,\vec{e}_x + V_0\sin\alpha\,\vec{e}_z$ et $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, en projetant l'expression de $\vec{v}$ sur $\vec{e}_x$ et sur $\vec{e}_z$ on obtient

$$\underline{V_x(t) = V_0\cos\alpha\,e^{-\frac{\lambda}{m}t}} \quad \text{et} \quad \underline{V_z(t) = \left(V_0\sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}}$$

On aurait aussi pu projeter l'équation du mouvement et résoudre les deux équations différentielles :

$$\underline{\frac{dV_x}{dt} + \frac{\lambda}{m}V_x = 0} \quad \text{et} \quad \underline{\frac{dV_z}{dt} + \frac{\lambda}{m}V_z = -mg}$$

2. Déterminer l'instant où l'objet atteint son altitude (海拔高度) maximale

L'objet atteint son altitude maximale lorsque $V_z = 0$ On a donc :

$$V_z(t_n) = 0 = \left(V_0\sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t_n} - \frac{mg}{\lambda}$$

Ainsi $e^{-\frac{\lambda}{m}t_n} = \dfrac{\frac{mg}{\lambda}}{V_0\sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}}$

Puis $\boxed{t_n = \frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0\lambda\sin\alpha}{m} + 1\right)}$

4.4 Exemple 3 : Mouvement d'un masse accrochée à un ressort

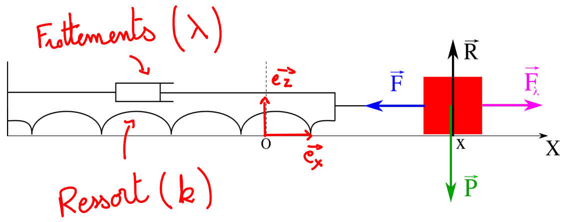
4.4.1 Equation du mouvement

On considère un ressort horizontal (selon Ox) de raideur k relié à une masse m. On représente la perte d'énergie du système par une force de frottement fluide $\vec{F}_\lambda = -\lambda\vec{v}$. A l'instant initial on écarte le ressort de sa position d'équilibre d'une longueur x_0 puis on le lâche sans vitesse initiale.

1. Préciser le système d'étude et le référentiel choisi

On étudie la masse m dans le référentiel du sol

2. Faire un schéma et choisir le système de coordonnées adaptées au mouvement. Préciser les conditions initiales



On repère la masse m à partir de sa position d'équilibre O

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

3. Établir le bilan des forces s'exerçant sur le système étudié.

Quatre forces s'appliquent à la masse m :

$$\vec{P} = m\vec{g} \ , \ \vec{R} \ , \ \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e_x} = -kx\vec{e_x}$$

$$\text{et } \ \vec{F_\lambda} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{e_x}$$

4. Appliquer le PFD pour déterminer l'équation vérifiée par $x(t)$ la position de la masse m au cours du temps

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F_\lambda}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - kx\vec{e_x} - \lambda\dot{x}\vec{e_x}$$

Projection selon $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$ (pas de mouvement vertical)

Projection selon $\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = -mg + R$, $\ddot{z} = 0$ donc $R = mg$

le poids et la réaction du support se compensent et $\boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

4.4.2 Résolution d'équation différentielles linéaire du second ordre à coefficients constant

Soit une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x) \qquad \text{avec} \qquad \{a, b, c\} \in \mathbb{R}$$

g(x) une fonction sans lien avec f(x)

1. On cherche d'abord une solution de **l'équation homogène** (sans second membre) :

$$af''_H(x) + bf'_H(x) + cf_H(x) = 0$$

Pour cela on résout **l'équation caractéristique** $ar^2 + br + c = 0$, c'est une équation du second degré où $f''_H(x)$ est remplacé par r^2, $f'_H(x)$ par r, et $f_H(x)$ par 1.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
les solutions de l'équation du second degré sont :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$\boxed{f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(A\ ch(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x) + B\ sh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x)\right)} \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (cas le plus fréquent)
les solutions de l'équation du second degré sont :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$\boxed{f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x)) + B\ \sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x))\right)} \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

où au choix

$$\boxed{f_H(x) = e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\ \cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x + \varphi)\right)} \quad \text{avec} \quad \{A, \varphi\} \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
la solution de l'équation du second degré est :

$$r = -\frac{b}{2a}$$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :

$$\boxed{f_H(x) = (A + Bt)e^{-\frac{b}{2a}t}} \quad \text{avec} \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$$

2. Il faut ensuite trouver une **solution particulière**. En physique la solution particulière sera **toujours de la forme du second membre.**

   Ici nous allons seulement voir le cas le plus fréquent c'est à dire quand le second membre est constant. On pose donc $g(x) = d$ et on cherche une constante f_{sp} qui vérifie l'équation $af''_{sp} + bf'_{sp} + cf_{sp} = d$, on a donc :

$$f_{sp} = \frac{d}{c}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent finalement :

$$f(x) = f_H(x) + f_{sp}$$

4. Il existe dans $f(x)$ des constantes $\{A, B\}$ ou $\{A, \varphi\}$ qui n'ont pas encore été déterminées (c'est pour cela qu'on parle pour l'instant "des" solutions de l'équation différentielle.

   Pour les déterminer on utilise les conditions initiales ou conditions aux limites données par le problème. Pour deux constantes inconnues il faut deux équations, en général :

$$f(0) = \ldots \quad \text{et} \quad f'(0) = \ldots$$

Remarque : Ici les dérivées de f, f' et f'', ont été choisies pour l'exemple comme des dérivées par rapport à x, si la dérivée est par rapport à une autre variable, t par exemple, les résultats sont identiques en remplaçant x par la nouvelle variable.

Remarque : La solution générale de l'équation homogène s'écrit de manière générale :

$$f_H(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

pour $\Delta > 0$ comme pour $\Delta < 0$. Le fait que r_1 et r_2 soient réels dans un cas et complexes dans l'autre amène aux deux solutions différentes proposées.

4.4.3 Résolution du problème de la masse accrochée au ressort

1. Dans un premier cas un néglige les frottements fluides. Faire apparaître la grandeur $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dans l'équation différentielle et déterminer l'expression de la position de la masse $x(t)$ en fonction du temps.

l'équation du mouvement devient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c'est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants

Equation caractéristique : $r^2 + \omega_0^2 = 0$, $\Delta = -4\omega_0^2 < 0$, $r_{1,2} = \pm i\omega_0$

Solutions : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $V(0) = \dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$ donc $B = 0$

et $x(0) = A = X_0$

Solution : $\boxed{x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)}$

La position varie de façon sinusoïdale

2. On prend en compte maintenant les frottements fluides. Faire apparaître la grandeur $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$ dans l'équation différentielle et déterminer l'expression de la position de la masse $x(t)$ en fonction du temps dans le cas où $Q > \frac{1}{2}$.

l'équation du mouvement est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Ici $Q > \frac{1}{2}$ donc $\Delta < 0$ et $\begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{cases}$

Solutions : $x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$

où on a posé $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Conditions initiales : $\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\Omega A\sin\Omega t + \Omega B\cos\Omega t\right)$

$x(0) = x_0 = A$

$v(0) = \dot{x}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}x_0 + \Omega B$ donc $B = \frac{\omega_0 x_0}{2Q\Omega} = \frac{x_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

Solution :

Finalement :

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin\Omega t\right)}$$

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ est le temps caractéristique de décroissance des oscillations