

# FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 5

## Travail et énergie

École Centrale Pékin

Année 1

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Vocabulaire</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Puissance et travail d'une force</b>	<b>2</b>
2.1	Puissance . . . . .	2
2.2	Travail élémentaire . . . . .	2
2.3	Travail fini . . . . .	3
2.4	Travail d'une force conservative . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>4</b>
3.1	Energie cinétique . . . . .	4
3.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	4
3.3	Exemples d'application . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Energie potentielle</b>	<b>6</b>
4.1	Définition . . . . .	6
4.2	Exemples d'énergies potentielles . . . . .	6
4.3	Equilibre d'un point matériel . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Energie mécanique et théorème de l'énergie mécanique</b>	<b>9</b>
5.1	Définition et théorème de l'énergie mécanique . . . . .	9
5.2	Applications . . . . .	10
5.3	Analyse du mouvement grâce à un graphique énergétique . . . . .	11

# 1 Vocabulaire

Puissance 功率	Référence 参考
Travail 功	Equilibre 平衡
Travail élémentaire 元功	Stabilité 稳定性
Grandeur algébrique 代数数量	Extremum 极值
Moteur 发动机	Minimum 极小值
Resistance 阻力	Maximum 极大值
Conservative 保守的	Dissipé 耗散
Energie cinétique 动能	Lié 被束缚的
Energie potentielle 势能	Libre 自由的
Energie mécanique 机械能	

## 2 Puissance et travail d'une force

### 2.1 Puissance

**Définition :** Soit un point matériel  $M$  se déplaçant selon le vecteur vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  et soumis à une force  $\vec{f}$ . La puissance (功率) appliquée par la force  $\vec{f}$  à  $M$  est une grandeur algébrique (代数数量) définit par :

$$\mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R}) = \vec{f} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

#### Propriétés :

- $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  dépend du référentiel choisi donc  $\mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R})$  aussi.
- $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3}$  et son unité dans le système S.I. est le Watt (W).  
 $1 \text{ W} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-3} = 1 \text{ N.m.s}^{-1}$
- Ordre de grandeur :
  - Appareil domestique  $\simeq$  kW
  - Moteur TGV  $\simeq$  MW
  - Centrale Nucléaire  $\simeq$  GW
- Grandeur algébrique  $\mathcal{P} = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{f}, \vec{v})$ 
  - Puissance motrice (发动机) si  $\mathcal{P} > 0$  donc  $\cos(\vec{f}, \vec{v}) > 0$
  - Puissance résistante (阻力) si  $\mathcal{P} < 0$  donc  $\cos(\vec{f}, \vec{v}) < 0$

### 2.2 Travail élémentaire

**Définition :** Soit  $M$  un point matériel de déplaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . La travail élémentaire (元功) de la force  $\vec{f}$  s'exerçant sur  $M$  pendant  $dt$  s'écrit :

$$\delta W(\vec{f}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R})dt$$

 Le travail peut s'écrire directement en fonction du déplacement  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$ . Le démontrer

**Propriétés :**

- Dimension  $[\delta W] = M.L^2.T^{-2}$ , le travail est homogène à une énergie, son unité est le Joule.  
 $1 \text{ J} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2} = 1 \text{ N.m}$
- Grandeur algébrique
  - Travail moteur si  $\delta W > 0$
  - Travail résistant si  $\delta W < 0$
- $\vec{f} \perp d\vec{OM} \Rightarrow \delta W = 0$ . Une force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

Remarques :

1. L'écriture  $\delta W = \mathcal{P}dt$  permet de relier le travail à la variable temporelle alors que l'écriture  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$  permet de le relier aux variables spatiales.
2. "δ" est utilisé pour représenter une petite partie d'une grandeur échangée par exemple  $\delta W$ . On a alors  $\int \delta W = W$ .  
 "d" est utilisé pour représenter une petite variation d'une grandeur, par exemple  $dx$ . On a alors  $\int dx = \Delta x$ .

### 2.3 Travail fini

**Définition :** Soit un point matériel  $M$  qui décrit dans le référentiel  $\mathcal{R}$  une trajectoire quelconque entre deux point A et B entre les instant  $t_A$  et  $t_B$ .

Le travail fini de la force  $\vec{f}$  s'appliquant sur  $M$  au cours du déplacement est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{M \in AB} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}dt = \int_{M \in AB} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

Remarque : Cette intégrale dépend a priori du chemin suivi entre A et B!

### 2.4 Travail d'une force conservative

**Définition :**

Une force conservative (保守的) est une force qui conserve l'énergie totale (énergie mécanique) du système au cours du mouvement.

**Propriétés :**

Lors d'un déplacement quelconque dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi. Il dépend seulement des instants initial et final.

- On peut écrire le travail élémentaire d'une force conservative sous la forme de la différentielle d'une fonction  $f$ .

$$\delta W(\vec{f}_c) = df$$

- Le travail fini s'écrit alors comme la variation de cette fonction entre les instants initial et final.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_c) = \Delta f_{AB} = f(B) - f(A)$$

Remarque : Nous verrons un peu plus loin que la fonction  $f$  définie dans le paragraphe précédent n'est autre que l'opposé de l'énergie potentielle.

 Montrer que le poids est une force conservative. Donner l'expression de la fonction  $f$  correspondante.

### 3 Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

#### 3.1 Energie cinétique

**Définition :** Soit  $M(m)$  un point matériel se déplaçant dans un référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ . Son énergie cinétique (动能) est :

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|^2$$

**Propriétés :**

- L'énergie cinétique est toujours positive.
- $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  dépend du référentiel choisi donc  $E_c$  aussi.
- Dimension  $[E_c] = M.L^2.T^{-2}$ . Son unité est le Joule

#### 3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}/\mathcal{R}_g)$$

En intégrant la précédente relation entre deux instant A et B on obtient **le théorème de l'énergie cinétique** :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}/\mathcal{R}_g)$$

où  $\vec{F}_{ext}$  est la résultantes des forces extérieures.

 Démontrer ces deux théorèmes.

Remarque :

- Si  $W > 0$  (travail moteur),  $\Delta E_c > 0$  l'énergie cinétique augmente et la vitesse aussi, le mouvement est accéléré.
- Si  $W < 0$  (travail résistant),  $\Delta E_c < 0$  l'énergie cinétique diminue et la vitesse aussi, le mouvement est ralenti.
- Si  $W = 0$  (travail nul),  $\Delta E_c = 0$ , le mouvement est uniforme.

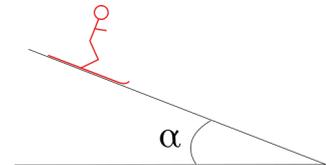
### 3.3 Exemples d'application

#### 3.3.1 Skieur

 Soit un skieur de masse  $m$  sur une pente faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

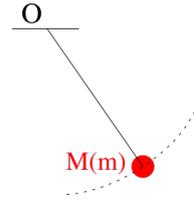
Le skieur se laisse glisser sur la piste avec une vitesse initiale nulle. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant quelconque, déterminer l'équation du mouvement du skieur.

On néglige les frottements.



### 3.3.2 Pendule

✎ Soit un point matériel  $M(m)$  situé à l'extrémité d'une corde de masse nulle (pendule simple), lâché sans vitesse initiale d'un angle  $\theta_0$ . Déterminer l'équation du mouvement du pendule à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.



## 4 Energie potentielle

### 4.1 Définition

**Définition :** Soit  $M(m)$  un point matériel en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  sous l'action d'une force  $\vec{F}$  **conservative**.

Le travail élémentaire (infinitésimal) de cette force peut s'écrire sous la forme :

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p$$

$E_p$  est appelée **énergie potentielle** (势能). On dit alors que la force **dérive d'une énergie potentielle**.

En intégrant entre 2 positions A et B de M on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$$

Remarque : l'énergie potentielle étant défini par sa différentielle, elle n'est connue qu'à **une constante près**. En effet :

$$d(E_p + K) = dE_p$$

Pour fixer cette constante on choisit une **référence** d'énergie potentielle en un point O, par exemple  $E_p(O) = 0$ .

### 4.2 Exemples d'énergies potentielles

#### 4.2.1 Energie potentielle de pesanteur

Soit un point matériel  $M(m)$  se déplaçant dans un référentiel  $\mathcal{R}$  soumis à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

Le travail élémentaire du poids pendant un déplacement  $d\vec{OM}$  s'écrit :

$$\delta W(\vec{P}) = -mgdz = -d(mgz)$$

Le poids est une force conservative qui dérive d'un potentiel :

$$E_{pp} = mgz + C$$

Remarque :  $E_{pp}$  augmente avec l'altitude.

Si on oriente l'axe vertical vers le bas alors  $\vec{P} = mgz\vec{e}_z$  et  $\delta W = +mgz = -d(-mgz + C)$

Ainsi dans le cas d'un axe  $Oz$  orienté vers le bas  $E_{pp} = -mgz + C$  mais on a bien que l'énergie potentielle augmente avec l'altitude (quand  $z$  diminue).

#### 4.2.2 Energie potentielle élastique

Dans le cas d'un point matériel  $M(m)$  soumis à la force de rappel d'un ressort de raideur  $k$

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$$

Le travail élémentaire de la force de rappel lors d'un déplacement  $d\vec{OM} = dl \vec{e}_x$  s'écrit :

$$\delta W(\vec{F}) = -k(l - l_0)dl = -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C\right)$$

En posant l'allongement du ressort  $x = l - l_0$  on obtient :

$$E_{pk} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Remarque : On choisit en générale la référence (参考) d'énergie potentielle  $E_{pk}(x = 0) = 0$ , on a alors  $E_{pk} = \frac{1}{2}kx^2$ .

#### 4.3 Equilibre d'un point matériel

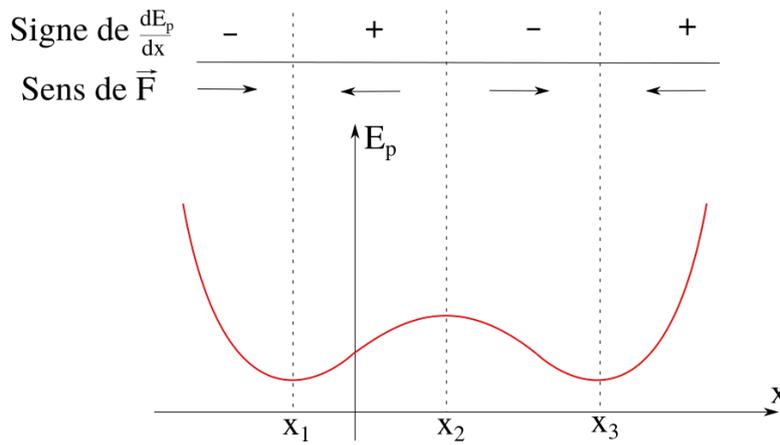
Soit  $M(m)$  un point matériel soumis à une force conservative  $\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$ . Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F(x)dx = -dE_p$$

La force peut donc s'écrire :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Considérons le profil d'énergie potentiel suivant et étudions les points d'équilibre (平衡) et leur stabilité (穩定性).



• Equilibre

Le point  $M$  est à l'équilibre si  $F(x_e) = 0$  soit :

$$\boxed{\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0}$$

Les points  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont des positions d'équilibre. Une position d'équilibre correspond à un **extremum** (极值) de l'énergie potentielle.

• Stabilité

Une position d'équilibre est stable si le système retourne vers cet équilibre après une petite perturbation.

Au voisinage d'un point d'équilibre  $x_e$  on peut écrire d'après la formule de Taylor :

$$F(x) \simeq F(x_e) + (x - x_e) \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_e}$$

Or  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$  d'où  $\frac{dF}{dx} = -\frac{d^2E_p}{dx^2}$  et  $F(x_e) = 0$  (équilibre)

Finalement on a :

$$\boxed{F(x) = -(x - x_e) \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}}$$

En  $x > x_e$ , pour que l'équilibre soit stable il faut que  $F(x) < 0$  donc  $\left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} > 0$ .

En  $x < x_e$ , pour que l'équilibre soit stable il faut que  $F(x) > 0$  donc  $\left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} > 0$ .

Un équilibre est **stable** si et seulement si il correspond à un **minimum** (极小值) d'énergie potentielle, c'est-à-dire :

$$\boxed{\left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} > 0}$$

Un équilibre est **instable** si et seulement si il correspond à un **maximum** (极大值) d'énergie potentielle, c'est-à-dire :

$$\boxed{\left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} < 0}$$

Sur le graphique précédent les point  $x_1$  et  $x_3$  sont des points d'équilibre stable et le point  $x_2$  un point d'équilibre instable.

Remarque : Proche de l'équilibre, le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'énergie potentielle de n'importe quelle force conservative peut s'écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + (x - x_e) \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}$$

Or  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0$  donc :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}$$

En posant  $k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} > 0$  pour un équilibre stable et en choisissant la référence d'énergie potentielle  $E_p(x_e) = 0$  on obtient :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$

On retrouve l'énergie potentielle du ressort. Cela signifie que n'importe quelle force conservative peut être approximée, au voisinage de l'équilibre, par une force de rappel élastique, c'est **l'approximation harmonique**. C'est pourquoi l'étude du ressort et de l'équation de l'oscillateur harmonique est si importante en physique.

## 5 Energie mécanique et théorème de l'énergie mécanique

### 5.1 Définition et théorème de l'énergie mécanique

**Définition :** On définit l'énergie mécanique (机械能) d'un système par la relation :

$$E_m = E_c + E_p$$

**Théorème de l'énergie mécanique :**

Soit  $M(m)$  un point matériel étudié dans  $\mathcal{R}_g$  galiléen soumis à des forces conservatives  $\vec{F}_c$  et dissipatives  $\vec{F}_d$  (耗散). On a alors :

$$dE_m = \delta W(\vec{F}_d) < 0$$

Sous forme intégrale on a :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_d) < 0$$

 Démontrer le théorème de l'énergie mécanique.

**Propriétés :**

- En l'absence de force dissipative  $\Delta E_m = 0$ , l'énergie mécanique se conserve.
- S'il existe des forces dissipatives l'énergie mécanique diminue au cours du mouvement. De l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

**5.2 Applications****5.2.1 le ressort**

 Soit un ressort horizontal de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . A l'instant initial on l'étire jusqu'à la position  $x_0$  et on le lâche sans vitesse initiale, déterminer l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

**5.2.2 Le pendule**

 Soit un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $l$  lâché d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale à l'instant initial. Déterminer l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

### 5.3 Analyse du mouvement grâce à un graphique énergétique

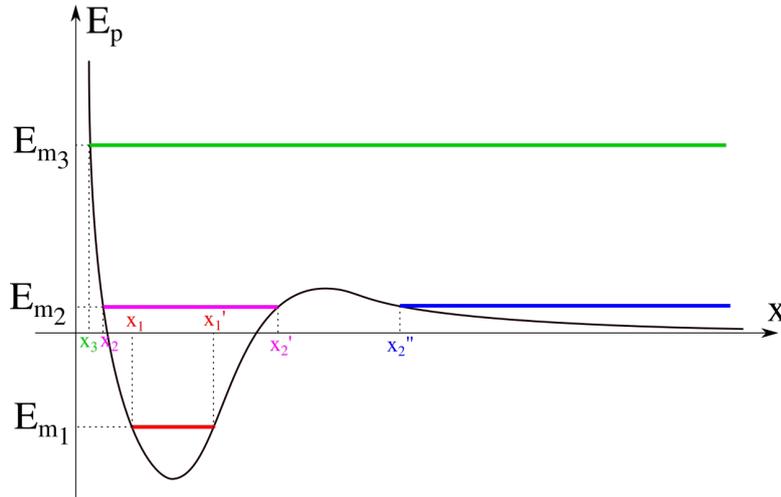
Étudions pour plus de simplicité un système à 1 degré de liberté  $x$ .

D'après 5.1,  $\Delta E_m \leq 0$ . Nous allons séparer deux cas.

•  $\Delta E_m = 0$  : Mouvement conservatif.

Dans ce cas l'énergie mécanique est constante et le système peut prendre toutes les positions  $x$  telles que  $E_p(x) \leq E_m$  car  $E_c \geq 0$ . Ceci contraint la liberté de mouvement du système.

Prenons l'exemple du profil d'énergie potentielle suivant :



- $E_m = E_{m_1}$  alors  $x$  peut prendre toutes les valeurs entre  $x_1$  et  $x_1'$ . C'est un état **lié** (被束缚的)
- $E_m = E_{m_2}$  :
  - Si  $x_{initial} < x_2'$  alors  $x$  peut prendre toutes les valeurs entre  $x_2$  et  $x_2'$ . C'est un état **lié**
  - Si  $x_{initial} > x_2''$  alors  $x$  peut prendre toutes les valeurs entre  $x_2''$  et l'infini. C'est un état **libre** (自由的)
- $E_m = E_{m_3}$  alors  $x$  peut prendre toutes les valeurs entre  $x_3$  et l'infini. C'est un état **libre**

•  $\Delta E_m < 0$  : Mouvement dissipatif.

Dans ce cas de figure l'énergie mécanique et l'énergie potentielle diminuent au cours du mouvement jusqu'à atteindre un minimum d'énergie potentielle correspondant à un équilibre stable.

