Francais des sciences - Physique 5

Travail et énergie

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

1 Vocabulaire

Puissance 功率
Travail 功
Travail élémentaire 元功
Grandeur algébrique 代数量
Moteur 发动机
Resistance 阻力
Conservative 保守的
Energie cinétique 动能
Energie potentielle 势能
Energie mécanique 机械能

Référence 参考
Equilibre 平衡
Stabilité 稳定性
Extremum 极值
Minimum 极小值
Maximum 极大值
Dissipé 耗散
Lié 被束缚的
Libre 自由的

2 Puissance et travail d'une force

2.1 Puissance

Définition : Soit un point matériel M se déplaçant selon le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et soumis à une force $\vec{f}$. La puissance (功率) appliquée par la force $\vec{f}$ à M est une grandeur algébrique (代数量) définit par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R}) = \vec{f}.\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Propriétés :

- $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel choisi donc $\mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R})$ aussi.
- $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3}$ et son unité dans le système S.I. est le Watt (W).
  1 W = 1 kg.m^2.s^{-3} = 1 N.m.s^{-1}
- Ordre de grandeur :
  — Appareil domestique $\simeq$ kW
  — Moteur TGV $\simeq$ MW
  — Centrale Nucléaire $\simeq$ GW
- Grandeur algébrique $\mathcal{P} = ||\vec{f}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{f},\vec{v})$
  — Puissance motrice (发动机) si $\mathcal{P} > 0$ donc $\cos(\vec{f},\vec{v}) > 0$
  — Puissance résistante (阻力) si $\mathcal{P} < 0$ donc $\cos(\vec{f},\vec{v}) < 0$

2.2 Travail élémentaire

Définition :
Soit M un point matériel de déplaçant dans le référentiel $\mathcal{R}$. La travail élémentaire (元功) de la force $\vec{f}$ s'exerçant sur M pendant dt s'écrit :

$$\boxed{\delta W(\vec{f}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R})dt}$$

Le travail peut s'écrire directement en fonction du déplacement $\delta W = \overrightarrow{f}.d\overrightarrow{OM}$. Le démontrer

Propriétés :

- Dimension $[\delta W] = M.L^2.T^{-2}$, le travail est homogène à une énergie, son unité est le Joule.
  1 J = 1 kg.m^2.s^{-2} = 1 N.m
- Grandeur algébrique
  - Travail moteur si $\delta W > 0$
  - Travail résistant si $\delta W < 0$

— $\vec{f} \perp d\overrightarrow{OM} \Rightarrow \delta W = 0$. Un force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

Remarques :

1. L'écriture $\delta W = \mathcal{P}dt$ permet de relier le travail à la variable temporelle alors que le l'écriture $\delta W = \overrightarrow{f}.d\overrightarrow{OM}$ permet de le relier aux variables spatiales.
2. "δ" est utilisé pour représenter une petite partie d'une grandeur échangée par exemple δW. On a alors $\int \delta W = W$.
   "d" est utilisé pour représenter une petite variation d'une grandeur, par exemple dx. On a alors $\int dx = \Delta x$.

2.3 Travail fini

Définition : Soit un point matériel M qui décrit dans le référentiel $\mathcal{R}$ une trajectoire quelconque entre deux point A et B entre les instant t_A et t_B.

Le travail fini de la force $\vec{f}$ s'appliquant sur M au cours du déplacement est :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{M\in AB} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}dt = \int_{M\in AB} \vec{f}.d\overrightarrow{OM}}$$

Remarque : Cette intégrale dépend a priori du chemin suivi entre A et B !

2.4 Travail d'une force conservative

Définition :
Une force conservative (保守的) est une force qui conserve l'énergie totale (énergie mécanique) du système au cours du mouvement.

Propriétés :

Lors d'un déplacement quelconque dans un référentiel $\mathcal{R}$, le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi. Il dépend seulement des instants initial et final.

- On peut écrire le travail élémentaire d'une force conservative sous la forme de la différentielle d'une fonction f.

$$\boxed{\delta W(\vec{f_c}) = df}$$

- Le travail fini s'écrit alors comme la variation de cette fonction entre les instants initial et final.

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{f_c}) = \Delta f_{AB} = f(B) - f(A)}$$

Remarque : Nous verrons un peu plus loin que la fonction f définie dans le paragraphe précédent n'est autre que l'opposé de l'énergie potentielle.

Montrer que le poids est une force conservative. Donner l'expression de la fonction f correspondante.

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$ et $d\vec{OM} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

donc $\delta W(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{OM} = m\vec{g}.d\vec{OM} = -mg\,dz$

$$\boxed{\delta W(\vec{P}) = -d(mgz)}$$

On a bien $\delta W(\vec{P}) = df$ avec $f = -mgz$

3 Energie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

3.1 Energie cinétique

Définition : Soit $M(m)$ un point matériel se déplaçant dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. Son énergie cinétique (动能) est :

$$\boxed{E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\,||\vec{v}(M/\mathcal{R})||^2}$$

Propriétés :

- L'énergie cinétique est toujours positive.
- $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel choisi donc E_c aussi.
- Dimension $[E_c] = M.L^2.T^{-2}$. Son unité est le Joule

3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}/\mathcal{R}_g)}$$

En intégrant la précédente relation entre deux instant A et B on obtient **le théorème de l'énergie cinétique** :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - Ec(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}/\mathcal{R}_g)}$$

où $\vec{F}_{ext}$ est la résultantes des forces extérieures.

Démontrer ces deux théorèmes.

$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\vec{v}.\vec{v}\right) = m\,\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}$

Or d'après le PFD $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$

Donc $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}.\vec{v} = \sum \mathcal{P}_{ext}}$

Ce théorème est parfois appelé théorème de la Puissance cinétique.

$$dE_c = \sum \mathcal{P}_{ext}\, dt = \sum \delta W_{ext}$$

En intégrant entre 2 positions A et B il vient :

$$\int_A^B dE_c = \int_A^B \sum \delta W_{ext} \Rightarrow \boxed{\Delta E_{c_{AB}} = \sum W_{ext_{A \to B}}}$$

Remarque :

— Si $W > 0$ (travail moteur), $\Delta E_c > 0$ l'énergie cinétique augmente et la vitesse aussi, le mouvement est accéléré.

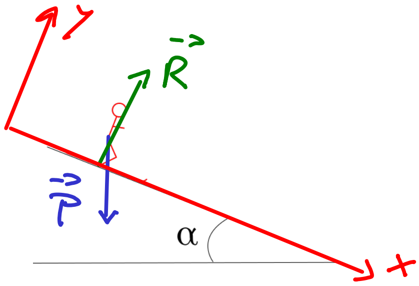
— Si $W < 0$ (travail résistant), $\Delta E_c < 0$ l'énergie cinétique diminue et la vitesse aussi, le mouvement est ralenti.

— Si $W = 0$ (travail moteur), $\Delta E_c = 0$, le mouvement est uniforme.

3.3 Exemples d'application

3.3.1 Skieur

Soit un skieur de masse m sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale.
Le skieur se laisse glisser sur la piste avec une vitesse initiale nulle. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant quelconque, déterminer l'équation du mouvement du skieur.
On néglige les frottements.



Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha\, \vec{e_x} - mg\cos\alpha\, \vec{e_y}$

  $\hookrightarrow \delta W(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{OM} = mg\sin\alpha\, dx$

- $\vec{R} = R\,\vec{e_y}$

  $\hookrightarrow \delta W(\vec{R}) = \vec{R}.d\vec{OM} = 0$

La réaction du sol ne travaille pas

Intégrale première du mouvement

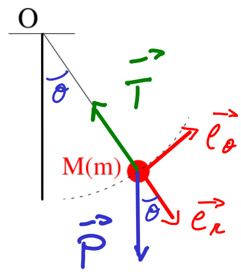
On applique le TEC entre l'instant initial $(0,0)$ et un instant quelconque (t,x) :

$$E_c(x) - E_c(0) = W(\vec{P}) \Longrightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mg\sin\alpha\, x \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{1}{2}\dot{x}^2 - g\sin\alpha\, x = 0}$$

En dérivant il vient : $\dot{x}\ddot{x} - g\sin\alpha\,\dot{x} = 0$ d'où $\boxed{\ddot{x} - g\sin\alpha = 0}$

3.3.2 Pendule

Soit un point matériel $M(m)$ situé à l'extrémité d'une corde de masse nulle (pendule simple), lâché sans vitesse initiale d'un angle θ_0
Déterminer l'équation du mouvement du pendule à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.



Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

  ↳ $\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{OM} = -mg\sin\theta\, r\, d\theta$
- $\vec{T} = -T\vec{e_r} \rightarrow \delta W(\vec{T}) = 0$

$\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$
$d\vec{OM} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$
$\vec{V} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

On applique le TEC entre 0 et t :

$$dE_c = \delta W \Rightarrow \int_0^t dE_c = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \delta W \Rightarrow E_c(t) - E_c(0) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} -mg\,r\sin\theta\, d\theta$$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = mgr(\cos\theta - \cos\theta_0)}$ IPM, en dérivant on obtient :

$$mr\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgr\dot{\theta}\sin\theta$$ et donc $\boxed{\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0}$

4 Energie potentielle

4.1 Définition

Définition : Soit $M(m)$ un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$ **conservative**.

Le travail élémentaire (infinitésimal) de cette force peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = -dE_p}$$

E_p est appelée **énergie potentielle** (势能). On dit alors que la force **dérive d'une énergie potentielle**.

En intégrant entre 2 positions A et B de M on obtient :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)}$$

Remarque : l'énergie potentielle étant défini par sa différentielle, elle n'est connue qu'**à une constante près**. En effet :

$$d(E_p + K) = dE_p$$

Pour fixer cette constante on choisit une **référence** d'énergie potentielle en un point O, par exemple $E_p(O) = 0$.

4.2 Exemples d'énergies potentielles

4.2.1 Energie potentielle de pesanteur

Soit un point matériel $M(m)$ se déplaçant dans un référentiel $\mathcal{R}$ soumis à son poids :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e_z}$$

Le travail élémentaire du poids pendant un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = -mgdz = -d(mgz)$$

Le poids est une force conservative qui dérive d'un potentiel :

$$\boxed{E_{pp} = mgz + C}$$

Remarque : E_{pp} augmente avec l'altitude.

Si on oriente l'axe vertical vers le bas alors $\overrightarrow{P} = mgz\overrightarrow{e_z}$ et $\delta W = +mgz = -d(-mgz + C)$

Ainsi dans le cas d'un axe Oz orienté vers le bas $E_{pp} = -mgz + C$ mais on a bien que l'énergie potentielle augmente avec l'altitude (quand z diminue).

4.2.2 Energie potentielle élastique

Dans le cas d'un point matériel $M(m)$ soumis à la force de rappel d'un ressort de raideur k

$$\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$$

Le travail élémentaire de la force de rappel lors d'un déplacement $d\overrightarrow{OM} = dl\ \overrightarrow{e_x}$ s'écrit :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = -k(l - l_0)dl = -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C\right)$$

En posant l'allongement du ressort $x = l - l_0$ on obtient :

$$\boxed{E_{pk} = \frac{1}{2}kx^2 + C}$$

Remarque : On choisit en générale la référence (参考) d'énergie potentielle $E_{pk}(x = 0) = 0$, on a alors $E_{pk} = \frac{1}{2}kx^2$.

4.3 Equilibre d'un point matériel

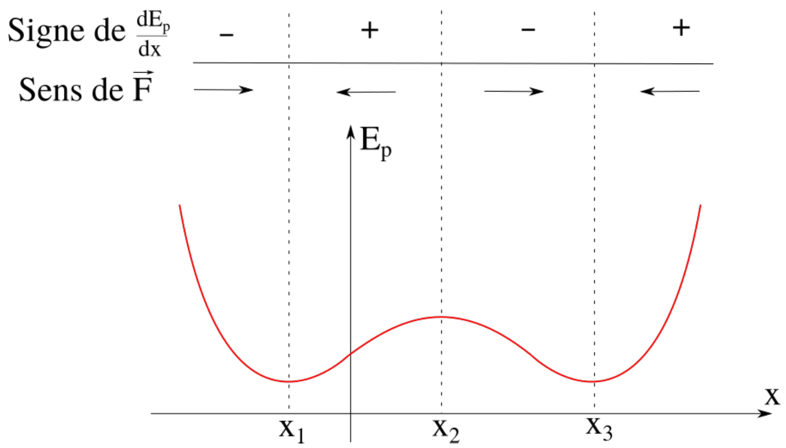
Soit $M(m)$ un point matériel soumis à une force conservative $\overrightarrow{F} = F(x)\ \overrightarrow{e_x}$. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = F(x)dx = -dE_p$$

La force peut donc s'écrire :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Considérons le profil d'énergie potentiel suivant et étudions les points d'équilibre (平衡) et leur stabilité (稳定性).



• Equilibre

Le point M est à l'équilibre si $F(x_e) = 0$ soit :

$$\boxed{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_e} = 0}$$

Les point x_1, x_2 et x_3 sont des positions d'équilibre. Une position d'équilibre correspond à un **extremum** (极值) de l'énergie potentielle.

• Stabilité

Une position d'équilibre est stable si le système retourne vers cet équilibre après une petite perturbation.
Au voisinage d'un point d'équilibre x_e on peut écrire d'après la formule de Taylor :

$$F(x) \simeq F(x_e) + (x - x_e)\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_e}$$

Or $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ d'où $\frac{dF}{dx} = -\frac{d^2E_p}{dx^2}$ et $F(x_e) = 0$ (équilibre)

Finalement on a :

$$\boxed{F(x) = -(x - x_e)\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e}}$$

En $x > x_e$, pour que l'équilibre soit stable il faut que $F(x) < 0$ donc $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e} > 0$.

En $x < x_e$, pour que l'équilibre soit stable il faut que $F(x) > 0$ donc $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e} > 0$.

Un équilibre est **stable** si et seulement si il correspond à un **minimum** (极小值) d'énergie
potentielle, c'est-à-dire :

$$\boxed{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e} > 0}$$

Un équilibre est **instable** si et seulement si il correspond à un **maximum** (极大值) d'énergie
potentielle, c'est-à-dire :

$$\boxed{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e} < 0}$$

Sur le graphique précédent les point x_1 et x_3 sont des points d'équilibre stable et le point x_2 un point d'équilibre instable.

Remarque : Proche de l'équilibre, le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'énergie potentielle de n'importe quelle force conservative peut s'écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + (x - x_e)\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e}$$

Or $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_e} = 0$ donc :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e}$$

En posant $k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_e} > 0$ pour un équilibre stable et en choisissant la référence d'énergie potentielle $E_p(x_e) = 0$ on obtient :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$

On retrouve l'énergie potentielle du ressort. Cela signifie que n'importe quelle force conservative peut être approximée, au voisinage de l'équilibre, par une force de rappel élastique, c'est **l'approximation harmonique**. C'est pourquoi l'étude du ressort et de l'équation de l'oscillateur harmonique est si importante en physique.

5 Energie mécanique et théorème de l'énergie mécanique

5.1 Définition et théorème de l'énergie mécanique

Définition : On définit l'énergie mécanique (机械能) d'un système par la relation :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

Soit $M(m)$ un point matériel étudié dans $\mathcal{R}_g$ galiléen soumis à des forces conservatives $\vec{F}_c$ et dissipatives $\vec{F}_d$ (耗散). On a alors :

$$\boxed{dE_m = \delta W(\vec{F}_d) < 0}$$

Sous forme intégrale on a :

$$\boxed{\Delta E_m = W(\vec{F}_d) < 0}$$

Démontrer le théorème de l'énergie mécanique.

$\Delta E_m = \Delta(E_p + E_c) = \Delta E_p + \Delta E_c$

Toutes les forces extérieures

$$\left.\begin{array}{l} \text{Or } \Delta E_c = W(\vec{F}) \\ \Delta E_p = -W(\vec{F_c}) \end{array}\right\} \quad \Delta E_m = W(\vec{F}) - W(\vec{F_c}) = W(\vec{F_d})$$

Les forces conservatives

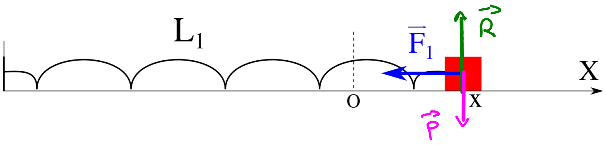
Propriétés :

- En l'absence de force dissipative $\Delta E_m = 0$, l'énergie mécanique se conserve.
- S'il existe des forces dissipatives l'énergie mécanique diminue au cours du mouvement. De l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

5.2 Applications

5.2.1 le ressort

Soit un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0. A l'instant initial on l'étire jusqu'à la position x_0 et on le lâche sans vitesse initiale, déterminer l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.



Toutes les forces sont conservatives ici donc $\Delta E_m = 0$

On a donc $E_m(t) = E_m(0)$

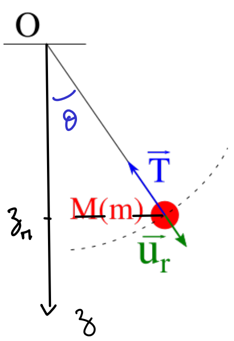
$$\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{E_{pk}} = 0 + \frac{1}{2} k x_0^2 \rightarrow \text{IPM}$$

En dérivant il vient : $m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$ puis $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$

On retrouve l'equation de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

5.2.2 Le pendule

Soit un pendule simple de masse m et de longueur l lâché d'un angle θ_0 sans vitesse initiale à l'instant initial. Déterminer l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.



Toutes les forces sont conservatives $\rightarrow \Delta E_m = 0$

Ainsi entre $t = 0$ et t :

$$E_m(0) = E_m(t) \rightarrow E_c(0) + E_{pp}(0) = E_c(t) + E_{pp}(t)$$

$E_c = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2$ et $E_{pp} = -mgz_M + C$ On prend $E_{pp}(l) = 0$ donc $C = mgl$

$E_{pp}(z_M) = mg(l - z_M)$

$E_{pp}(\theta) = mg(l - l\cos\theta)$

$E_{pp}(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$

Ainsi $0 + mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + mgl(1-\cos\theta)$ $\rightarrow$ IPM

En dérivant il vient :

$$0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

D'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$