Francais des sciences - Physique 6

Mouvement d'une particule chargée

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

Nous avons déjà vu qu'une particule de masse m est soumise à la force gravitationnelle lorsqu'elle est sous l'influence d'une autre masse. Par analogie, avec la masse et la gravitation, une particule chargée électriquement subit l'influence d'une autre charge ou d'un courant électrique par l'intermédiaire d'une force électromagnétique.

Dans ce chapitre nous allons étudier cette nouvelle force et voir son influence sur le mouvement de particules chargées.

1 Vocabulaire

produit vectoriel 向量积
charge 电荷
courant électrique 电流
force électromagnétique 电磁场力/洛伦兹力
champ électrique 电场
champ magnétique 磁场
foudre 闪电
uniforme 均匀的
permanent 持久的
conducteurs 导体
tension électrique 电压
spectromètre de masse 质谱法

2 Le produit vectoriel

On peut mathématiquement multiplier deux vecteurs, cette opération s'appelle le produit vectoriel (向量积) et se note $\wedge$.

2.1 Calcul du produit vectoriel

Soient deux vecteurs :

$$\vec{A} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \left| \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{B} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} = \left| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right.$$

et un troisième vecteur définit par :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

On peut calculer l'expression de $\vec{C}$ de deux façons :

- Calcul du produit vectoriel grâce aux coordonnées

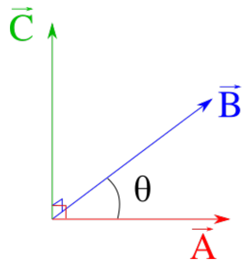
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \left| \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{array} \right.$$

- Calcul du produit vectoriel grâce aux normes

$$\vec{C} = ||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \times \sin(\vec{A}, \vec{B})\ \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} \perp \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{u} \perp \vec{B}$$

2.2 Propriétés

- Le résultat d'un produit vectoriel $\vec{C}$ est un vecteur.
- Les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, et $\vec{C}$ forment un trièdre direct, c'est à dire qu'on retrouve $\vec{C}$ grâce à la règle de la main droite avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$



- Si $\vec{A} \perp \vec{B}$ alors $||\vec{C}|| = ||\vec{A}|| \times ||\vec{B}||$
- Si $\vec{A} \parallel \vec{B}$ alors $||\vec{C}|| = 0$

3 Particule chargée soumise à l'interaction électromagnétique

3.1 Champs électromagnétique et force de Lorentz

Une particule chargée (电荷) crée dans l'espace un **champ électrique** (电场) $\overrightarrow{E}(M,t)$ qui dépend à priori du temps et de la position. Toute autre particule chargée dans l'espace ressent alors ce champ électrique par l'influence d'une force électrique.

De même, un courant électrique (电流) crée dans l'espace un **champ magnétique** (磁场) $\overrightarrow{B}(M,t)$ qui dépend à priori du temps et de la position. Toute particule chargée dans l'espace ressent alors ce champ magnétique par l'influence d'une force magnétique.

Lorsqu'une particule M chargée électriquement est en présence d'un champ électrique et magnétique, elle subit donc une force électrique et magnétique : la force électromagnétique appelée aussi **force de Lorentz** (洛伦兹力).

Soit M une particule de charge électrique q, de vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, la **force de Lorentz** subie par le point matériel M de charge q, de vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = q\left(\overrightarrow{E}(M,t) + \overrightarrow{v}(M,t) \wedge \overrightarrow{B}(M,t)\right)}$$

avec :
- le champ électrique par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{E}(M,t)$ [*unité* : $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$] ;
- le champ magnétique par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{B}(M,t)$ [*unité* : le testla (T)].

Les champs électrique et magnétique dépendent du référentiel d'étude, ainsi que la vitesse : c'est pourquoi il faudra toujours préciser le référentiel d'étude.

3.2 Influences des composantes électrique et magnétique de la force de Lorentz

Dans la force de Lorentz, on distingue la **composante électrique** et la **composante magnétique** :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = \underbrace{q\overrightarrow{E}}_{\text{composante électrique}} + \underbrace{q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)}_{\text{composante magnétique}}}$$

Chaque composante a une influence particulière sur la particule chargée M qui subit la force de LORENTZ :

- la **composante électrique** de la force de LORENTZ modifie la **norme de la vitesse** $\|\overrightarrow{v}\|$ du point M chargé et peut également changer sa **direction** (si le champ électrique n'est pas dans la même direction que la vitesse)

  ✎Montrer à l'aide du théorème de l'énergie cinétique que la composante électrique peut modifier la vitesse

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (V_F^2 - V_I^2) = \int_I^F q\vec{E} \cdot \vec{dl} \neq 0 \text{ à priori donc } V_I \neq V_F$$

- la **composante magnétique** de la force de LORENTZ modifie uniquement la **direction de la vitesse** $\overrightarrow{v}$ du point M chargé

  ✎Montrer à l'aide du théorème de l'énergie cinétique que la composante magnétique ne peut pas modifier la vitesse.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (V_F^2 - V_I^2) = \int_I^F \mathcal{P} \, dt = \int_I q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \, dt = 0 \text{ car } \vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$$

donc $V_I = V_F$

De plus $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ ce qui explique que la composante magnétique modifie la direction

3.3 Ordre de grandeur et conséquences

- **Champ électrique (en** $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$**) :**

— antenne d'un téléphone portable : 1 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$;

— dans une machine électrique d'usage quotidien : 10^5 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$,

— au voisinage de la **foudre** (闪电) : 3×10^6 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

— dans l'atome d'hydrogène, crée par un proton et ressenti par l'électron : $10^{11}\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

- **Champ magnétique (en tesla (T)) :**

— champ magnétique terrestre : 0.5 10^{-4} T.

— au voisinage d'un aimant : 10^{-1} T

— produit par un **électroaimant** : 1 T

— dans les **étoiles à neutrons** : 10^8 T.

- **Comparaison au poids :**

Avec ces ordres de grandeurs, on peut comparer l'effet de la force de LORENTZ avec la gravitation :

Le poids d'une particule chargée est négligeable devant la force de LORENTZ.

✎ Démontrer le résultat précédent

Pour un proton : $\left| \begin{array}{l} m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}\,kg \\ q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \end{array} \right.$

- $\vec{P} = m\vec{g} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-26}\,N$
- $\vec{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-23}\,N$ pour $B = 10^{-4}\,T$ et $\vec{v} = 1\,m.s^{-1}$
- $\vec{F_E} = q\vec{E} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,N$ pour $E = 1\,V.m^{-1}$

Même avec des valeurs de $\vec{B}, \vec{E}$ et $\vec{v}$ relativement faible on a
$\vec{E} \gg \vec{P}$ et $\vec{B} \gg \vec{P}$

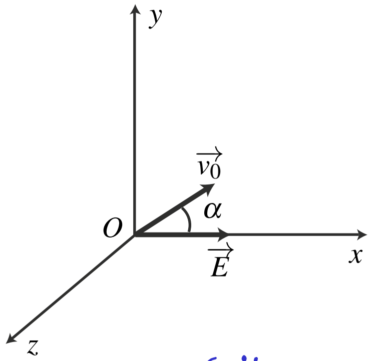
4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

On s'intéressera ici uniquement au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique **uniforme** (même champ en chaque point de l'espace, 均匀的) et **permanent** (indépendant du temps, 持久的).

4.1 Étude du mouvement

Soient $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen en coordonnées cartésiennes et $\vec{E}$ un champ électrique **uniforme** et **permanent** dans la direction $\vec{u_x}$.

Une particule particule M de masse m et de charge q a une vitesse $\vec{v_0}$ en $t = 0$ juste avant l'application du champ électrique. La vitesse initiale fait un angle α avec l'axe Ox.



- **Étude de la trajectoire :**

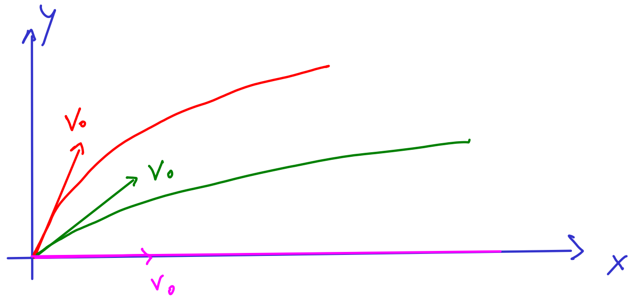
$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$ en projetant sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ on obtient : $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \dfrac{q}{m}E \\ \ddot{y} = 0 \end{array} \right.$

Puis en primitivant : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \dfrac{q}{m}Et + V_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = V_0 \sin\alpha \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{q}{m}E\dfrac{t^2}{2} + V_0 \cos\alpha\, t \\ y = V_0 \sin\alpha\, t \end{array} \right.$

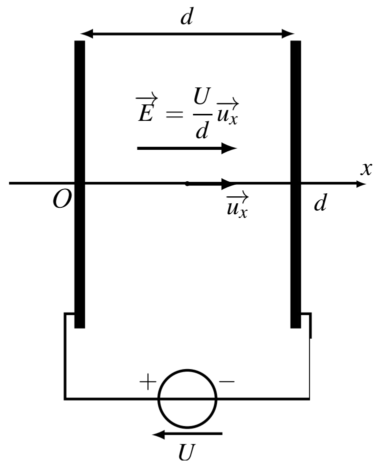
Ainsi $t = \dfrac{y}{V_0 \sin\alpha}$ et $\boxed{x(y) = \dfrac{qE}{2m}\left(\dfrac{y}{V_0 \sin\alpha}\right)^2 + V_0 \cos\alpha \left(\dfrac{y}{V_0 \sin\alpha}\right)}$

La trajectoire est une parabole.

On a pris ici $q > 0$



- **Accélération :**



Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme et permanent est obtenu en imposant une tension U (电压) entre deux plans conducteurs (导体) distants de d. Le champ électrique est alors :

$$\overrightarrow{E} = \frac{U}{d}\overrightarrow{u_x}$$

On peut alors définir l'énergie potentielle associée à la force électrique conservative avec la relation :

$$\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{u_x}$$

On a alors la variation infinitésimale de l'énergie potentielle de la particule :

$$dE_p = -q\overrightarrow{E}.dx\overrightarrow{u_x}$$

ou la variation totale entre les deux plans :

$$\Delta E_p = -qdE = -qU$$

✎ À partir de l'expression de la variation de l'énergie potentielle d'une particule, déterminer l'augmentation de la vitesse entre les deux plans. On prendra le cas particulier où la vitesse initiale est nulle $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$.

La force électrique est conservative donc l'énergie mécanique se conserve : $\Delta E_m = 0 = \Delta E_p + \Delta E_c$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\Delta E_p = -qU$$

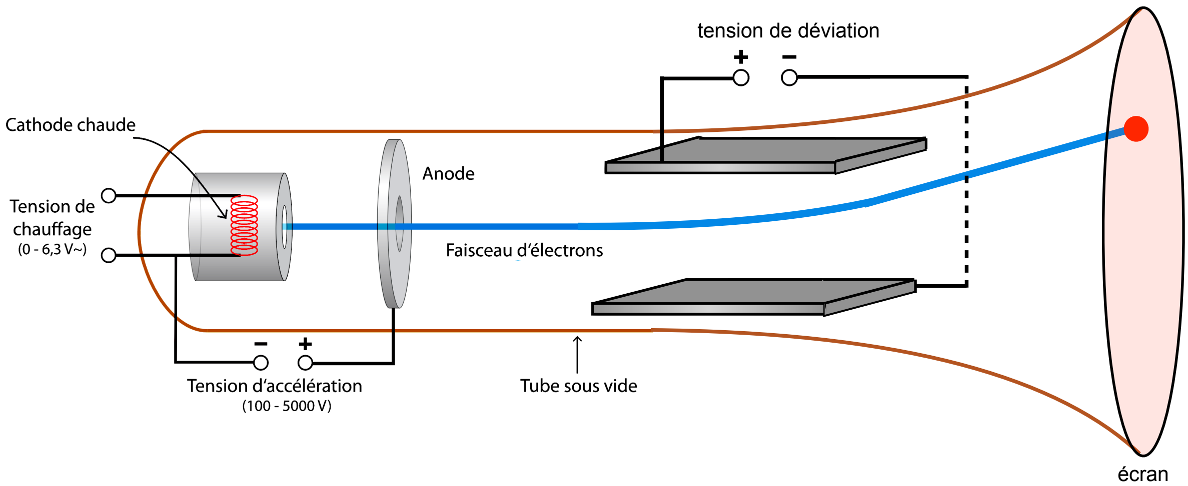
Ainsi $\Delta V = V_F = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

Pour un proton avec $U = 2kV$: $\Delta V = 6,2.10^5 \, m.s^{-1}$

4.2 Exemple : principe de fonctionnement des écrans cathodiques

Les **tubes cathodiques** qui équipaient avant les téléviseurs fonctionnent de la manière suivante :

- un courant électrique parcourt un filament qui se met à chauffer : des électrons des atomes du filament sont alors arrachés
- un champ électrique intense (10^7 V.m^{-1}) crée par une haute tension permet d'accélérer les électrons dans une direction
- les électrons passent entre deux plans parallèles soumis à une tension où règne un champ électrique orthogonal à la direction de propagation des électrons : les électrons sont déviés
- les électrons déviés vont frapper un écran qui émet de la lumière au niveau du point d'impact. La position du point lumineux peut être modifiée sur l'écran en modifiant la tension de déviation

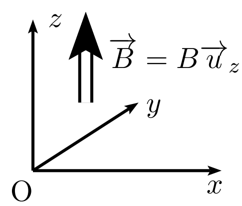


5 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

On s'intéressera ici uniquement au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique **uniforme** et **permanent**.

5.1 Étude du mouvement

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen en coordonnées catésiennes et $\vec{B}$ un champ magnétique **uniforme** et **permanent** dans la direction $\vec{u}_z$.



On considère une particule M de charge q et de masse m ayant une vitesse initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$.

- **Équation du mouvement :**

On applique le PFD à une particule (m, q) :

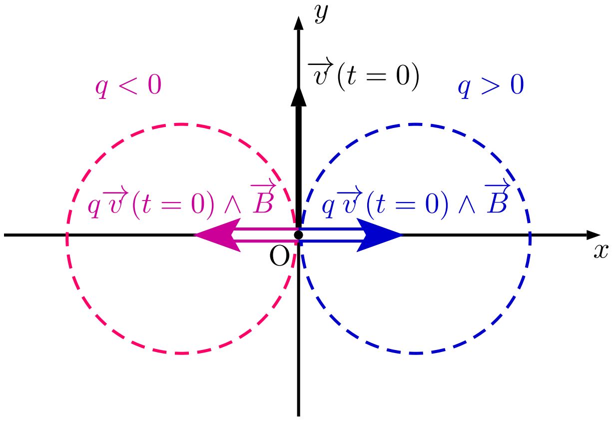
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{y}B\\ -\dot{x}B\\ 0\end{pmatrix}$$

Ainsi en projetant sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ il vient :

$$\begin{cases}\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} & (1)\\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} & (2)\\ \ddot{z} = 0 & (3)\end{cases}$$

- **Trajectoire : cas particulier où $\vec{v_0}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux**

Lorsque $\vec{v}(t=0)$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux, la trajectoire de la particule est un cercle contenu dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ passant par O, dont le centre appartient à l'axe orthogonal à $(O;\vec{v}(t=0))$ et de rayon $R = \dfrac{m\,\|\vec{v}(t=0)\|}{|qB|}$.



✎ En posant $u = x + iy$ résoudre le système d'équations différentielles obtenues pour l'équation du mouvement et déterminer la trajectoire de la particule.

③ → $\dot{z} = \text{cst}$, or $\dot{z}(t=0) = 0$ donc $\dot{z} = 0$ et $z = \text{cst}$

De plus ① + i② ⇒ $\ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{qB}{m}(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y})$

En posant $\begin{cases} u = x + iy \\ \omega_c = \frac{qB}{m} \end{cases}$ on a $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

Ainsi $\ddot{u} + i\omega_c \dot{u} = 0$

La solution de cette équation différentielle est $\dot{u}(t) = A e^{-i\omega_c t}$

en $t=0$ $\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = V_0 \end{cases}$ donc $\dot{u}(0) = iV_0 = A$ puis $\dot{u}(t) = iV_0 e^{-i\omega_c t}$

En intégrant il vient $u(t) = -\frac{V_0}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + B$

en $t=0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ donc $u(0) = 0 = B - \frac{V_0}{\omega_c}$ d'où $B = \frac{V_0}{\omega_c}$

et $\boxed{u(t) = \frac{V_0}{\omega_c}\left(1 - e^{-i\omega_c t}\right)}$

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}(u(t)) = \dfrac{V_0}{\omega_c}(1 - \cos\omega_c t) \\ y(t) = \mathrm{Im}(u(t)) = -\dfrac{V_0}{\omega_c}\sin\omega_c t \end{cases}$$

On voit alors $\boxed{y^2 + \left(x - \frac{V_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{V_0}{\omega_c}\right)^2}$

c'est la trajectoire d'un cercle de rayon $\frac{V_0}{\omega_c}$ de centre $\left(0, \frac{V_0}{\omega_c}\right)$

Rq : $\omega_c(q)$ donc le centre du cercle et le rayon dépendent de q

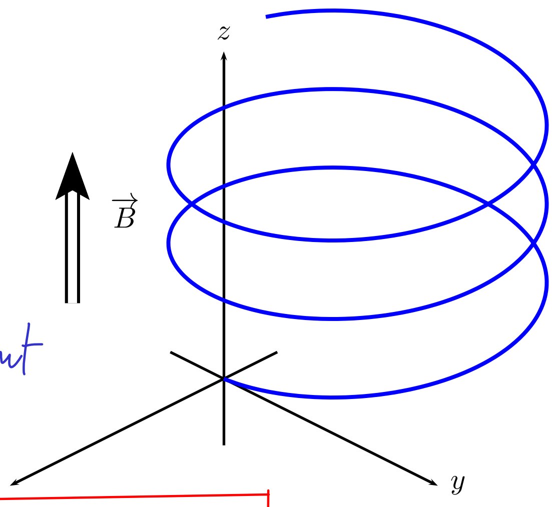
- **Cas général : trajectoire hélicoïdale**

> Dans le cas le plus général, le mouvement de la particule chargée dans un champ magnétique uniforme et permanent est la combinaison :
> — d'un mouvement rectiligne uniforme selon la direction de $\vec{B}$;
> — d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan orthogonal à $\vec{B}$.
> Il s'agit d'une *hélice*.

✎ Le démontrer

On choisit $\vec{B} = B\vec{u}_z$

$\vec{V}_0 = V_{0//}\vec{e}_y + V_{0\perp}\vec{e}_z$



• La composante $V_{0//}$ crée comme dans l'exemple précédent un mouvement circulaire de trajectoire $\boxed{\left(x - \frac{V_{0//}}{\omega_c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{V_{0//}}{\omega_c}\right)^2}$

• La composante $V_{0\perp}$ ajoute un mouvement selon z : $\ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = cst = \dot{z}(0) = V_{0\perp}$

D'où $\boxed{z(t) = V_{0\perp}t}$

5.2 Exemple : principe de fonctionnement du spectromètre de masse

Le but d'un **spectromètre de masse** (质谱法) est d'analyser les ions présents dans un faisceau. On utilise leur différences de masse pour connaître leur proportion relative en supposant que leur charge est connue.

Le dispositif fait intervenir **deux** phases :

- **la phase accélératrice :** on commence par accélérer les ions grâce à une forte tension U. L'application du théorème de l'énergie cinétique aux ions supposés initialement au repos permet d'obtenir leur vitesse à la fin de cette phase :

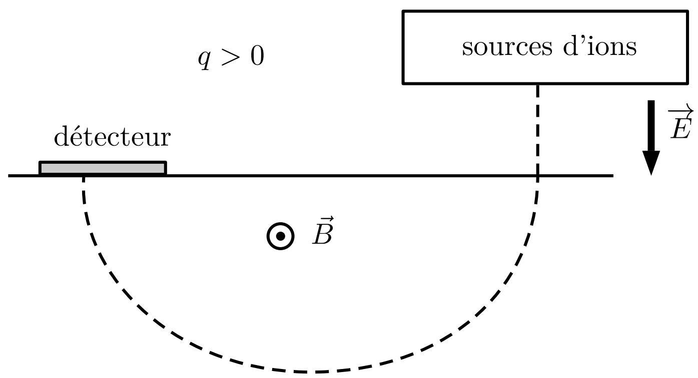
$$v = \sqrt{\frac{2\,|q|\,U}{m}}$$

- **la phase de déviation :** on applique alors un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ perpendiculairement au mouvement. On sait alors que les ions décrivent une trajectoire circulaire de rayon $R = \dfrac{mv}{|qB|}$. On en déduit que :

$$v = \sqrt{\frac{2\,|q|\,U}{m}} = \frac{|qB|\,R}{m} \Rightarrow \frac{2\,|q|\,U}{m} = \frac{q^2B^2R^2}{m^2}$$

  puis finalement :

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2U}{B^2R^2}$$



L'impact sur le détecteur permet de connaître le rayon R de la trajectoire et donc le rapport $\dfrac{q}{m}$ connaissant la tension accélératrice U et la norme du champ magnétique. Ce système permet de séparer des ions en fonction de leur masse et de leur charge ; si on connaît par ailleurs la charge des ions, on peut en déduire leur masse.