FdS

TD5 - Correction

Ex 1 : Equations différentielles à résoudre

1) $3\dot{y} + y = 2$ avec $y(0) = 1$

Equation homogène : $3\dot{y}_H + y_H = 0 \rightarrow y_H(t) = A e^{-t/3}$

Solution particulière : $y_{sp} = 2$

Solutions : $y(t) = A e^{-t/3} + 2$

On cherche A qui correspond aux conditions initiales :

$y(0) = 1 = A + 2$ donc $A = -1$

$$\boxed{y(t) = -e^{-t/3} + 2}$$

2) $\ddot{x} + 4x = 1$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Equation homogène : $\ddot{x} + 4x = 0$

↳ équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

$x_H(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

Solution particulière : $x_{sp} = \frac{1}{4}$

Solutions : $x(t) = \frac{1}{4} + A\cos(2t) + B\sin(2t)$

On utilise les conditions initiales :

$x(0) = 0 = \frac{1}{4} + A$ donc $A = -\frac{1}{4}$

$\dot{x}(0) = 0 = 2B$ donc $B = 0$

Finalement : $\boxed{x(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right)}$

3) $\ddot{x} - 4(\dot{x} - x) = -1$ avec $x(0) = \frac{1}{2}$ et $\dot{x}(0) = 0$

Equation homogène : $\ddot{x}_H - 4\dot{x} + 4x = 0$

↳ Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = 0$ donc $r = 2$

$x_H(t) = e^{-2t}(A + Bt)$

Solution particulière : $x_{sp} = -\frac{1}{4}$

Solutions : $x(t) = -\frac{1}{4} + e^{-2t}(A + Bt)$

De plus : $x(0) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + A$ donc $A = \frac{3}{4}$

$\dot{x}(t) = -2e^{-2t}(A + Bt) + Be^{-2t}$

Ainsi $\dot{x}(0) = 0 = -2(A) + B$ et $B = \frac{3}{2}$

$$\boxed{x(t) = e^{-2t}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{4}}$$

4) $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ avec $\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ Q > 1/2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$

a. $[\ddot{y}] = [\omega_0^2 y]$ donc $[\omega_0] = \frac{1}{T}$

$\left[\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}\right] = [\omega_0^2 y]$ donc $[Q] = 1$

b. Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

- $Q > \frac{1}{2}$ $(\Delta < 0)$

$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

$x(t) = \left(A\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\,t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\,t\right)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

On pose $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

$x(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

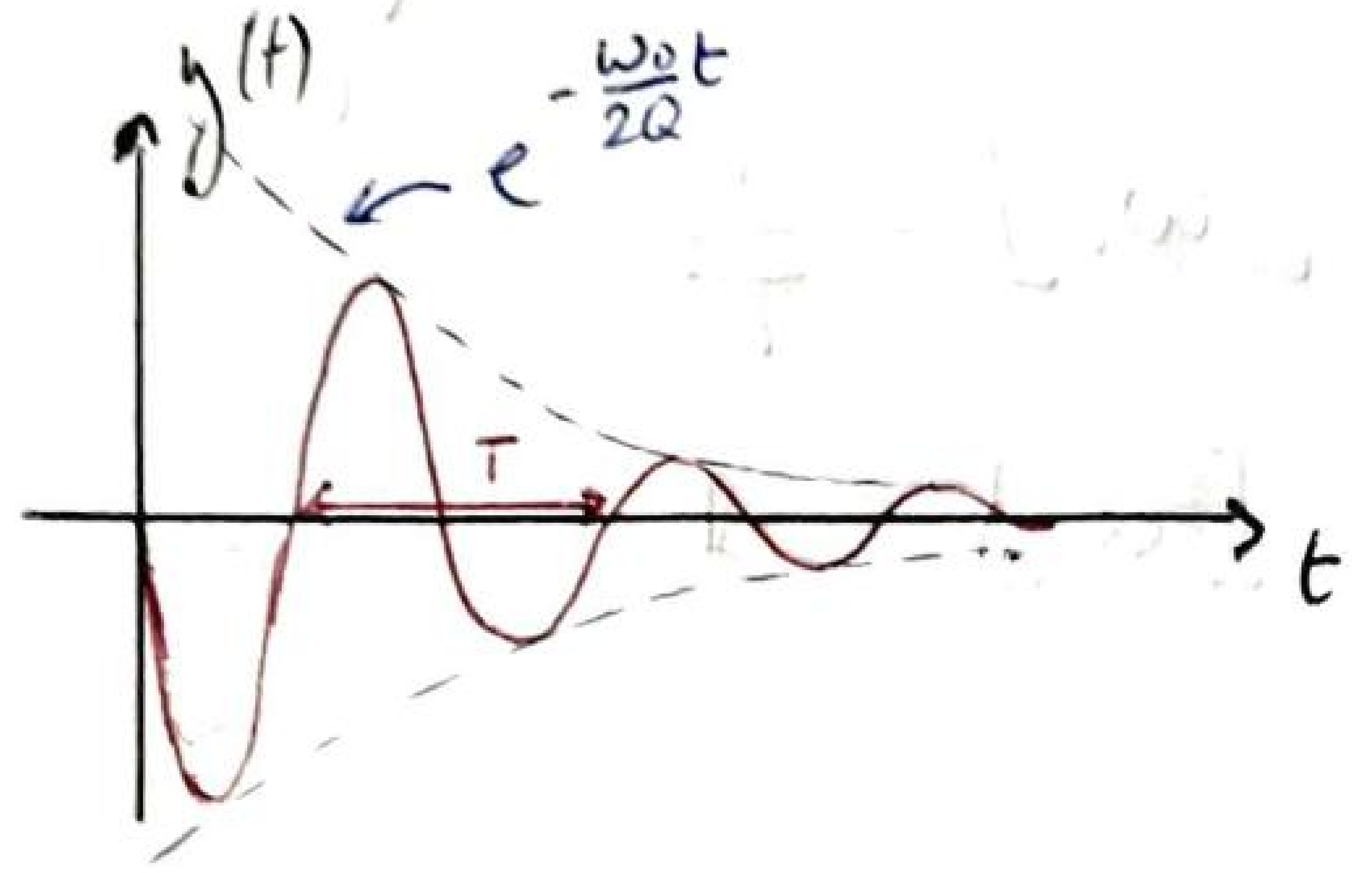
Scanned by TapScanner

$y(0) = 0 = A$

$\dot{y}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(B \sin \Omega t\right) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\Omega B \cos \Omega t\right)$

$\dot{y}(0) = -1 = \Omega B$ donc $B = -\frac{1}{\Omega}$

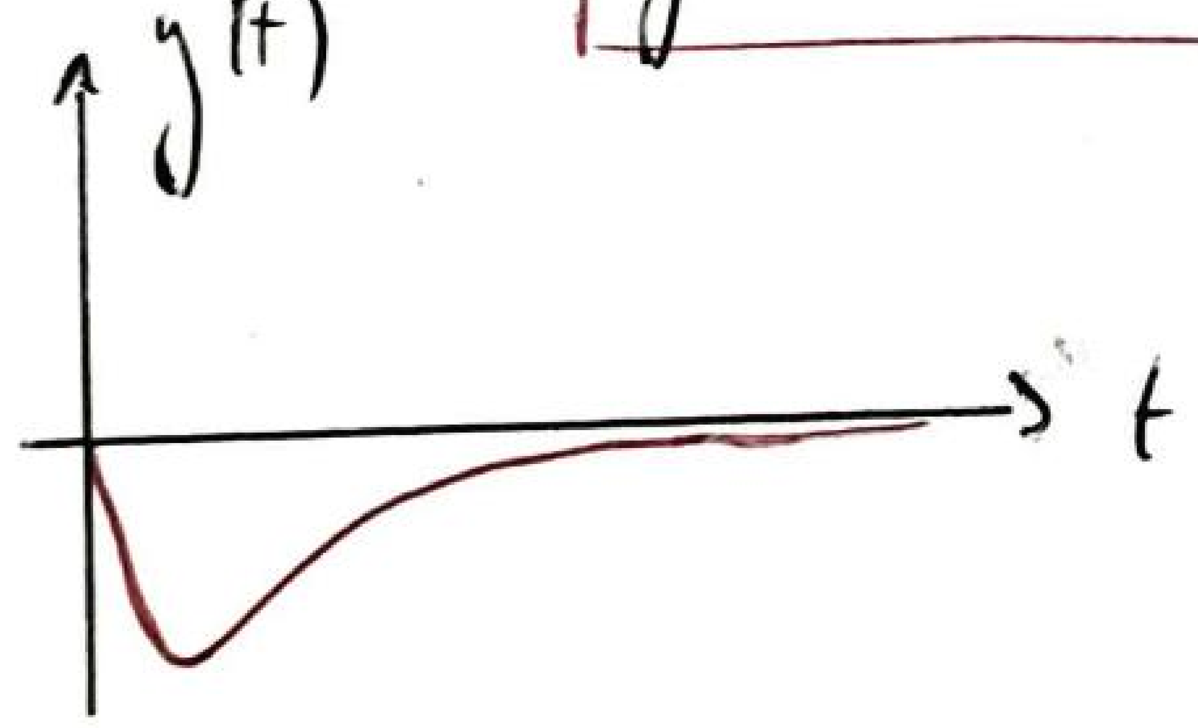
$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\frac{1}{\Omega} \sin \Omega t\right)}$$



$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$: "pseudo-période"

• $Q = 1/2$ $(\Delta = 0)$

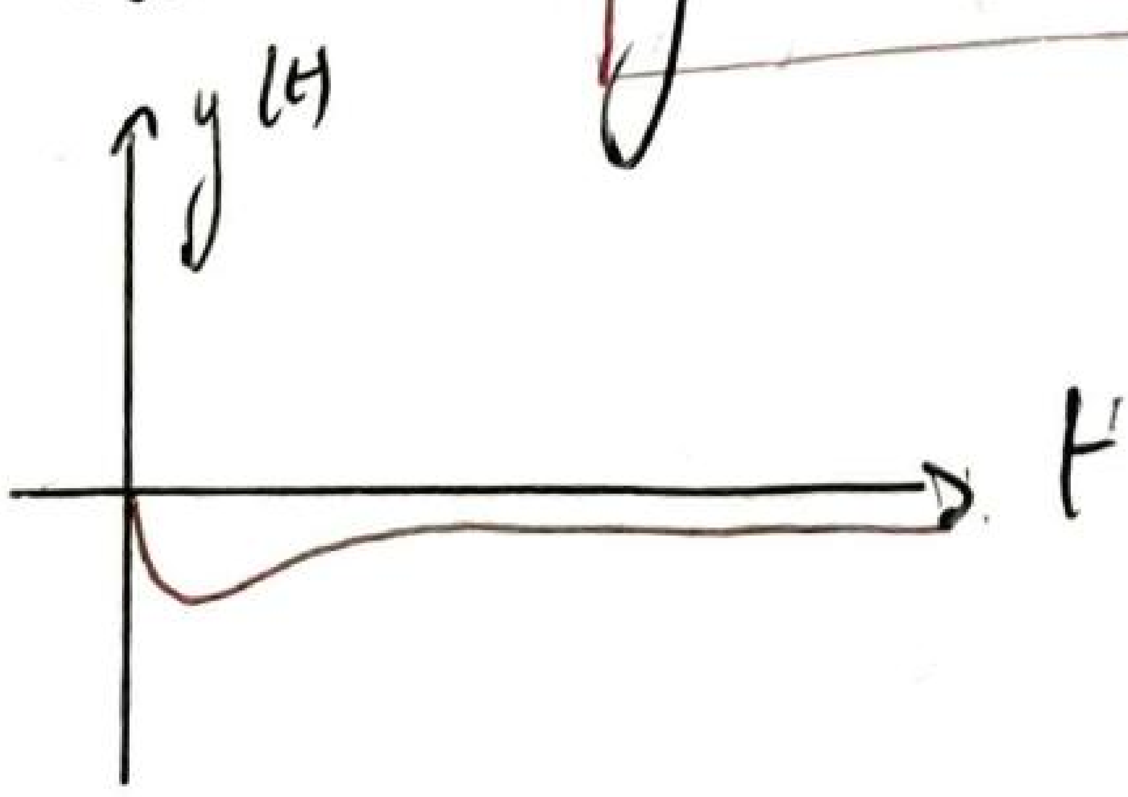
On trouve $\boxed{y(t) = -t\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}$



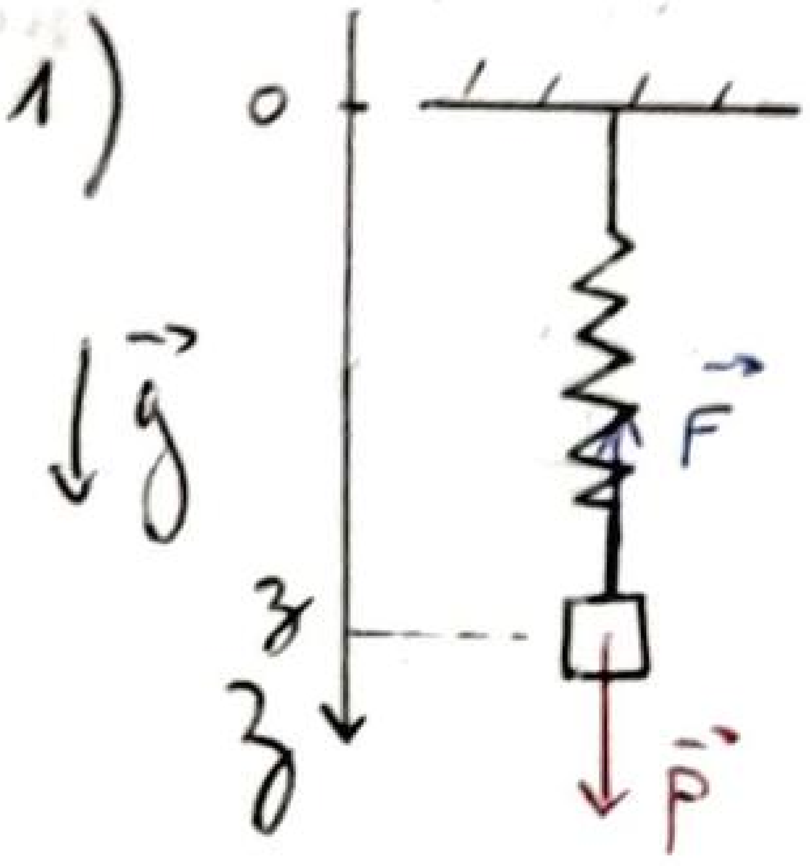
• $Q < \frac{1}{2}$ $(\Delta > 0)$

On trouve $\boxed{y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-\frac{1}{\Omega'} \operatorname{sh}(\Omega' t)\right)}$

avec $\Omega' = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$



Ex 2 : Ressort vertical

1) 

Les deux forces qui s'appliquent sont :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e_z}$$

$$\vec{F} = -k(l-l_0)\,\vec{e_z}$$

2) A l'équilibre les deux forces se compensent

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

En projetant sur $\vec{e_z}$ on obtient $mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$

d'où $\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

3) La force de rappel s'écrit alors

$$\vec{F} = -k(l-l_0)\,\vec{e_z}$$

$$= -k(z + l_{eq} - l_0)\,\vec{e_z}$$

$$= -kz\,\vec{e_z} - mg\,\vec{e_z}$$

Le PFD appliqué à la masse m dans le repère précédent donne :

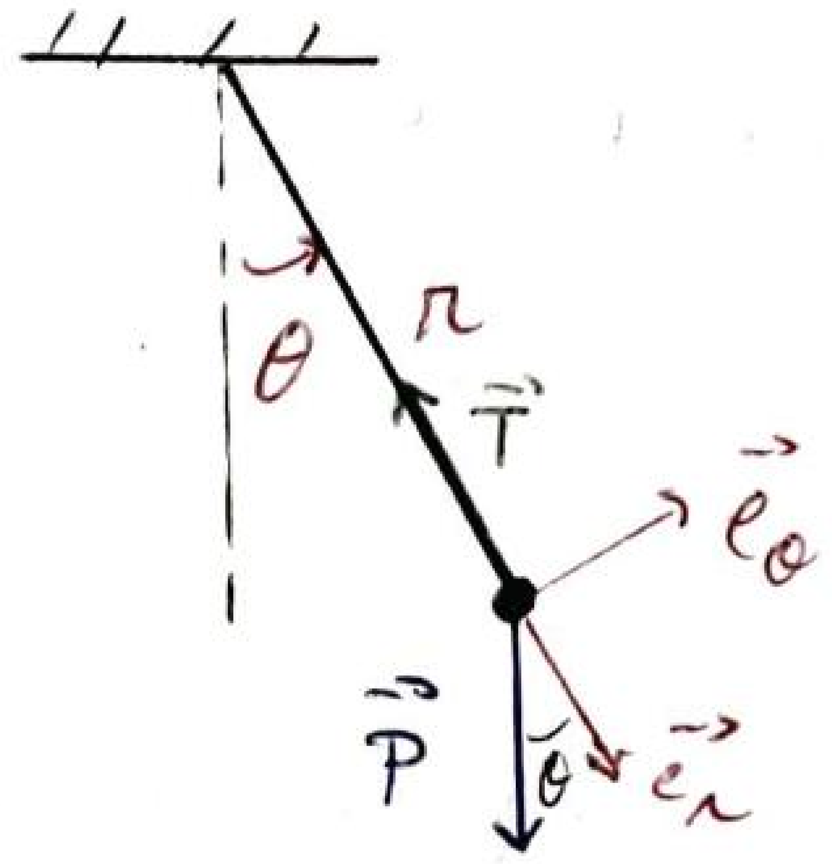
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} = -kz\,\vec{e_z}$$

de plus $\ddot{l} = \ddot{z}$ donc en projection sur $\vec{e_z}$:

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique

Ex 3 : Pendule



On applique le PFD à la masse m dans le référentiel du sol :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

Le mouvement est circulaire avec $r = cst$ donc :

$$\begin{cases} \vec{OM} = r\vec{e_r} \\ \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r} \end{cases}$$

De plus $\vec{T} = -T\vec{e_r}$ et $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

On projette le PFD sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

2) Avec l'aproximation des petits angles on a :

$$r\ddot{\theta} \simeq -g\theta \quad \text{où} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

c'est l'oscilateur harmonique.

Ainsi $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

De plus $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 = A \\ \dot{\theta}(0) = 0 = B\omega_0 \end{cases}$

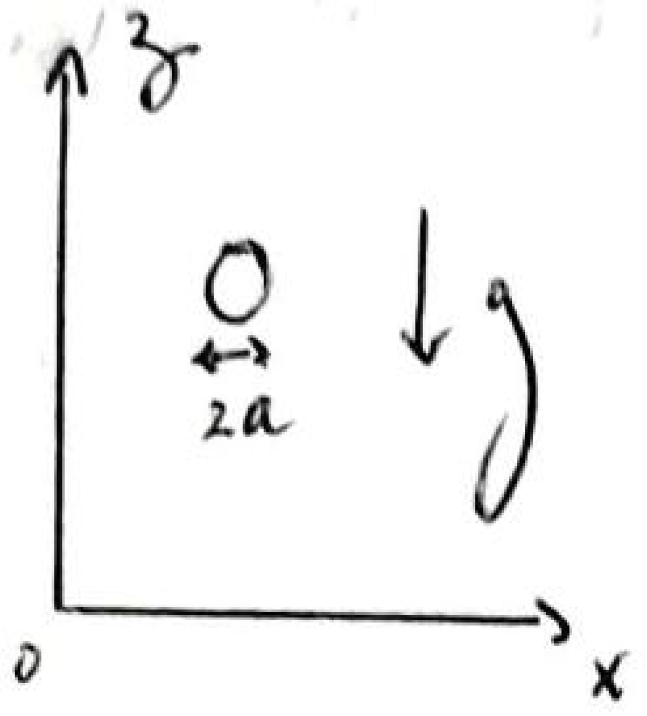
Donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$

3) la periode du mouvement est $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Cette période ne dépend pas de la masse, ce qui est remarquable.

Ex 4 : Temps de transit d'une goutte

1)



Système : goutte d'eau $M(m)$ dans R_{sol} galiléen

$\vec{OM} = z\vec{e_z}$, $\vec{v} = \dot{z}\vec{e_z}$, $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e_z}$

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

$$\vec{F} = -6\pi\eta\frac{a\vec{v}}{1+\frac{l}{a}} = -6\pi\eta\frac{a\dot{z}}{1+\frac{l}{a}}\vec{e_z}$$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$

On projette sur $\vec{e_z}$: $\boxed{m\ddot{z} = -mg - 6\pi\eta\frac{a\dot{z}}{1+\frac{l}{a}}}$

On peut réécrire cette équation $\begin{cases} \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = -g \\ \dot{v} + \frac{1}{\tau}v = -g \end{cases}$

avec $\tau = \dfrac{(1+\frac{l}{a})m}{6\pi\eta a}$

Ainsi $v = Ae^{-t/\tau} - \tau g$

et pour $t \to \infty$ on a $v \to v_{lim} = -\tau g$

Ainsi $\boxed{\vec{v}_{lim} = -\tau g\vec{e_z}}$

2) $V_{lim,1} = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ m \cdot s^{-1}$

$V_{lim,2} = 1{,}3\ m \cdot s^{-1}$

3) Calculons le temps caractéristique τ :

$$\begin{cases} \tau_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ s \\ \tau_2 = 0{,}13\ s \end{cases}$$

Or pour $t \gg \tau$, $v \sim V_{lim}$. On peut considérer que la vitesse limite est valable pendant tout le mouvement. (car τ est petit)

$$t_1 = \frac{d}{V_{lim,1}} = 6{,}2 \cdot 10^{5}\ s = 7{,}1 \text{ jours}$$

$$t_2 = \frac{d}{V_{lim,2}} = 6{,}2 \cdot 10^{3}\ s = 1{,}7 \text{ heures}$$

4) le rayon est inchangé mais la masse change

$$m' = \rho \cdot 4\pi a_2^2 \times e \neq m = \rho\, \frac{4}{3}\pi a_2^3$$

Ainsi $\tau_2' = \dfrac{\left(1 + \frac{l}{a_2}\right) m'}{6\pi \eta a_2}$

On obtient $\underline{V_{lim_2}' = 0{,}38\ m \cdot s^{-1}}$ et $\underline{t_2' = 2{,}1 \cdot 10^{4}\ s = 5{,}8\ h}$