
TRAVAUX DIRIGÉS DE FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 4 :

Dynamique du point

École Centrale Pékin

Année 1

APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 : Équations différentielles à résoudre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $3\dot{y} + y - 2 = 0$ avec $y(0) = 1$;
 2. $\ddot{x} + 4x = 1$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$;
 3. $\ddot{x} - 4(\dot{x} - x) = -1$ avec $x(0) = \frac{1}{2}$ et $\dot{x}(0) = 0$;
 4. $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ avec $\omega_0 > 0$, $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = -1$.
 - a) Quelles sont les dimensions de ω_0 et de Q ?
 - b) Résoudre l'équation différentielle et représenter y en fonction du temps pour différentes valeurs de Q ($Q < \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{2}$ et $Q > \frac{1}{2}$).
-

S'ENTRAÎNER

EXERCICE 2 : Ressort vertical

On considère un mobile de masse m accroché à un ressort vertical, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée à un point A .

1. Exprimer les différentes forces s'exerçant sur la masse m (on orientera l'axe vertical vers le bas, dans le sens d'allongement du ressort). On les dessinera également sur un schéma portant les notations nécessaires.
2. Exprimer la longueur à l'équilibre ℓ_{eq} du ressort en fonction de ℓ_0 , m , g et k .
3. On choisit l'origine de l'axe vertical à la position d'équilibre définie à la question précédente. La position de la masse m est donc repérée par $z = \ell - \ell_{eq}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable $z(t)$.

EXERCICE 3 : Pendule

On considère un point matériel M de masse m attaché à l'extrémité d'un pendule de longueur l . On néglige la masse du pendule. On lâche le pendule à $t = 0$, sans vitesse initiale et avec un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. A l'aide du principe fondamental de la dynamique (PFD) déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ entre la verticale et le pendule.
2. Pour les petits angles $\sin\theta \simeq \theta$. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ . La résoudre.
3. Quelle est la période du mouvement du pendule. Commenter.

EXERCICE 4 : Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Une goutte d'eau sphérique de rayon a , indéformable et de masse volumique ρ , tombe dans le champ de pesanteur uniforme \vec{g} suivant un axe vertical (Oz) dirigé vers le bas. L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de traînée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation $\vec{F} = -6\pi\eta \frac{a\vec{v}}{1 + \frac{a}{\ell}}$.

On négligera la poussée d'Archimède due à l'air.

1. Exprimer la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera \vec{V}_{lim} .
 2. On donne $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\ell = 0,07 \text{ }\mu\text{m}$ et $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}$. Calculer V_{lim} pour $a = a_1 = 0,01 \text{ mm}$ puis pour $a = a_2 = 0,1 \text{ nm}$.
 3. L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km . En utilisant les résultats précédents, calculer le temps de transit τ_1 et τ_2 de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2 .
 4. Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles de rayon a_2 et d'épaisseur $e = 0,1a_2$?
-