Travaux dirigés de Francais des Sciences - Physique 5 :
Travail et énergie

École Centrale Pékin

Année 1

Application du cours

Exercice 1 : Ressort vertical

On considère un mobile M de masse m accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical (axe (Oz) ascendant) dont l'autre extrémité est fixe en A. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide ℓ_0. On néglige les frottements éventuels. Le point M est repéré par sa position z par rapport à une origine O.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de z.
2. Exprimer l'énergie potentielle élastique, en fonction de ℓ.
3. Grâce à un bilan des forces, déterminer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.
4. On pose désormais $u = \ell - \ell_e$. Exprimer l'énergie potentielle totale (de pesanteur et élastique) en fonction de u. Commenter la pertinence du choix d'une origine de l'axe verticale à la position d'équilibre du ressort.

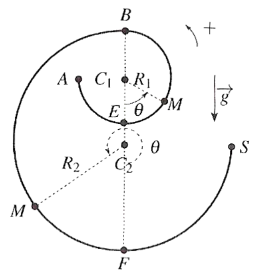
Exercice 2 : Cycliste du Tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante $\mathcal{P}$. On considère que les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste : $\overrightarrow{F} = -\lambda v \overrightarrow{v}$ où λ est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle en v dépendant de m, λ et $\mathcal{P}$.
2. En considérant que $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}$, montrer que l'équation déterminée à la question précédente peut se mettre sous la forme :
$$mv^2 \frac{dv}{dx} = \lambda \left(v_l^3 - v^3\right)$$
où v_l est une constante homogène à une vitesse dont on donnera la signification physique.
3. On pose $f(x) = \lambda \left(v_l^3 - v^3\right)$. Déduire l'équation différentielle vérifiée par f.
4. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x. On considèrera que le cycliste commence la ligne droite avec une vitesse v_0.
5. Application numérique : lors de la course cycliste, la puissance développée vaut $\mathcal{P} = 2,0$ kW et v_l vaut 20 m.s^{-1}. Déterminer la valeur et l'unité de λ et en déduire la distance caractéristique pour qu'un cycliste de masse $m = 85$ kg avec son vélo atteigne cette vitesse. Conclure.

S'entraîner

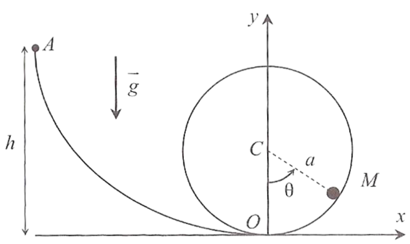
Exercice 3 : Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire



On considère le dispositif de la figure ci-contre, où un objet assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste formée de deux parties circulaires de rayons respectifs R_1 et R_2, et de centres respectifs C_1 et C_2, dans un plan vertical. On repère la position de M par l'angle θ. Pour la partie (1), $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, et pour la partie (2), $\theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.
Il n'y a pas de frottements et on note g l'accélération de la pesanteur.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du point M. On choisira l'origine des potentiels au point B ($\theta = \pi$). On distinguera les cas (1) et (2).
2. Tracer l'allure de $E_p(\theta)$.
3. Déterminer les positions angulaires d'équilibre et discuter leur stabilité.
4. L'anneau est initialement en A ($\theta = -\frac{\pi}{2}$). Il est lancé à une vitesse V_0 dans le sens trigonométrique.
   a) À quelle condition sur la vitesse V_0 l'anneau peut-il atteindre le point F en $\theta = 2\pi$?
   b) Cette condition étant remplie, donner l'expression de sa vitesse V_F en fonction des données du problème.
   c) À quelle condition sur V_0 l'anneau sort-il de la piste en S ($\theta = \frac{5\pi}{2}$?

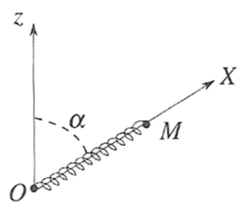
Exercice 4 : Acrobaties



Un adepte du roller, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O, la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (xOy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.
On note $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_0 de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive en O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est $\vec{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)$.
4. Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calcul)
   Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calcul)
5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.

Exercice 5 : Tige avec un ressort



On considère une tige fixe, dans un plan vertical (xOz), faisant l'angle α avec l'axe vertical (Oz). Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_v dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$ sur la tige inclinée.

1. Quelles sont les forces conservatives appliquées à M ? Déterminer l'expression de leur énergie potentielle E_p en fonction de X et α ?
2. Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles.
   a) Étudier la fonction $E_p(X)$ dans le cas où $mg\cos\alpha < k\ell_v$. Tracer son allure.
   b) Discuter sur le graphique les mouvements possibles en prenant à $t = 0$ les conditions initiales suivantes : $X_0 = \ell_v$ et $\dfrac{dX}{dt} = V_0$. Préciser la valeur maximale de V_0 pour que le mouvement se fasse entre deux positions extrêmes $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.
   c) Déterminer les fonctions $V(X)$ et $X(t)$ dans les conditions de la question précédente.