FdS

TD7 - Correction

Ex 1 : Un électron et un proton sont dans un champ magnétique

Le proton a une masse plus grande que celle de l'électron : $m_p > m_e$, donc s'ils ont même énergie cinétique $\frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}m_e v_e^2$, la vitesse de l'électron est plus grande que celle du proton : $\boxed{v_e > v_p}$

Les rayons des trajectoires circulaires sont $R_e = \frac{m_e v_e}{eB}$ et $R_p = \frac{m_p v_p}{eB}$. On a donc

$$\frac{R_e}{R_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = \frac{E_{ce}}{v_e} \times \frac{v_p}{E_{cp}} = \frac{v_p}{v_e}.$$

Le rayon de la trajectoire de l'électron est plus petit : $\boxed{R_e < R_p}$

Les pulsations cyclotrons sont données par $\omega_p = \frac{eB}{m_p}$ et $\omega_e = \frac{eB}{m_e}$, et par conséquent $\omega_p < \omega_e$. Les périodes sont $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e}$ et $T_e = \frac{2\pi}{\omega_p}$. Par conséquent, la période du mouvement de l'électron est inférieure à la période du mouvement du proton $\boxed{T_e < T_p}$

Ex 2 : Etude d'un spectromètre de masse

1) $^{20}_{10}Ne^+$ → 10 protons → $m_1 = 10m_p + 10m_n = \underline{3,346 \cdot 10^{-26} kg}$
10 neutrons

$^{2}_{10}Ne^+$ → 10 protons → $m_2 = 10m_p + 12m_n = \underline{3,681 \cdot 10^{-26} kg}$
12 neutrons

2) Accelerateur

a. On aplique le PFD à un ion :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}E_0\vec{e_x}}$$

le mouvement est rectiligne uniformément accéléré

b. Les ions vont de O à O_1 donc $\vec{F} = q\vec{E_0} \propto +\vec{e_x}$

Or $\vec{E_0} = E_0\vec{e_x} = \frac{V_0}{L}\vec{e_x}$

$q > 0$ donc $F > 0 \Rightarrow \boxed{V_0 > 0}$

c. D'après le théorème de l'energie cinétique :

$$\Delta E_{c_{OO_1}} = \int_O^{O_1} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_O^{O_1} \frac{eV_0}{L} dl = eV_0$$

De plus $\Delta E_{c_{OO_1}} = E_{c_{O_1}} = \frac{1}{2}mv_1^2$ car $v_0 = 0$

Ainsi $\boxed{V_1 = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m_1}}}$

d. De même $V_2 = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m_2}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\, V_1}$

e. AN : $V_1 = 1{,}07 \cdot 10^5 \ m \cdot s^{-1}$
$V_2 = 1{,}02 \cdot 10^5 \ m \cdot s^{-1}$

3) Selecteur de vitesse

a. Ne^+ est soumis à la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Pour avoir un mouvement rectiligne uniforme il faut $\vec{a} = \vec{0}$
donc d'après le PFD : $\vec{F} = \vec{0}$

Ainsi $q\vec{E}_1 = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$ puis $\dfrac{eU_1}{d} = e v_1 B_1$

Ainsi $\boxed{U_1 = v_1 B d = 535 V}$

b. $V_2 < V_1$ donc la composante magnétique est plus faible alors que la composante électique ne change pas
${}^{22}_{10}Ne^+$ est donc dévié dans la direction de $\boxed{\vec{E}_1 \rightarrow +\vec{e}_y}$

c. On applique le PFD à $^{22}_{10}Ne^+$

$$m\frac{d\vec{v_2}}{dt} = e\vec{E_1} + e\vec{v_2}\wedge\vec{B} \qquad \text{avec } \vec{v_2} \sim v_{2x}\vec{e_x} \sim \vec{cst}$$

En projection sur $\vec{e_y}$: $\boxed{m\frac{dv_{2y}}{dt} = eE_1 - ev_2B}$

puis : $v_{2y} = \frac{e}{m}(E_1 - v_2B)t$ car $v_{2y}(0) = 0$

et $y_2(t) = \frac{e}{m}(E_1 - v_2B)\frac{t^2}{2}$ car $y_2(0) = 0$

On cherche t_F qui correspond à l'instant où la particule arrive en O_2.

$\boxed{m\frac{dv_{2x}}{dt} \sim 0}$ donc $v_{2x} \sim v_2$ et $x_2(t) \simeq v_2 t$

Ainsi $t_F = \frac{L_1}{v_2}$

Pour que $^{22}_{10}Ne^+$ ne puisse pas passer il faut donc

$$y_2(t_F) > l$$

Ainsi $\boxed{\frac{e}{m}(E_1 - v_2B)\frac{L_1^2}{2v_2^2} > l}$

Scanned by TapScanner

Ex 3 : Etude d'un spectromètre de masse

1) Etude du mouvement dans les Dees

a. Dans le vide il n'y a pas de frottements et le poids du proton est négligeable

b. On aplique le PFD au proton :

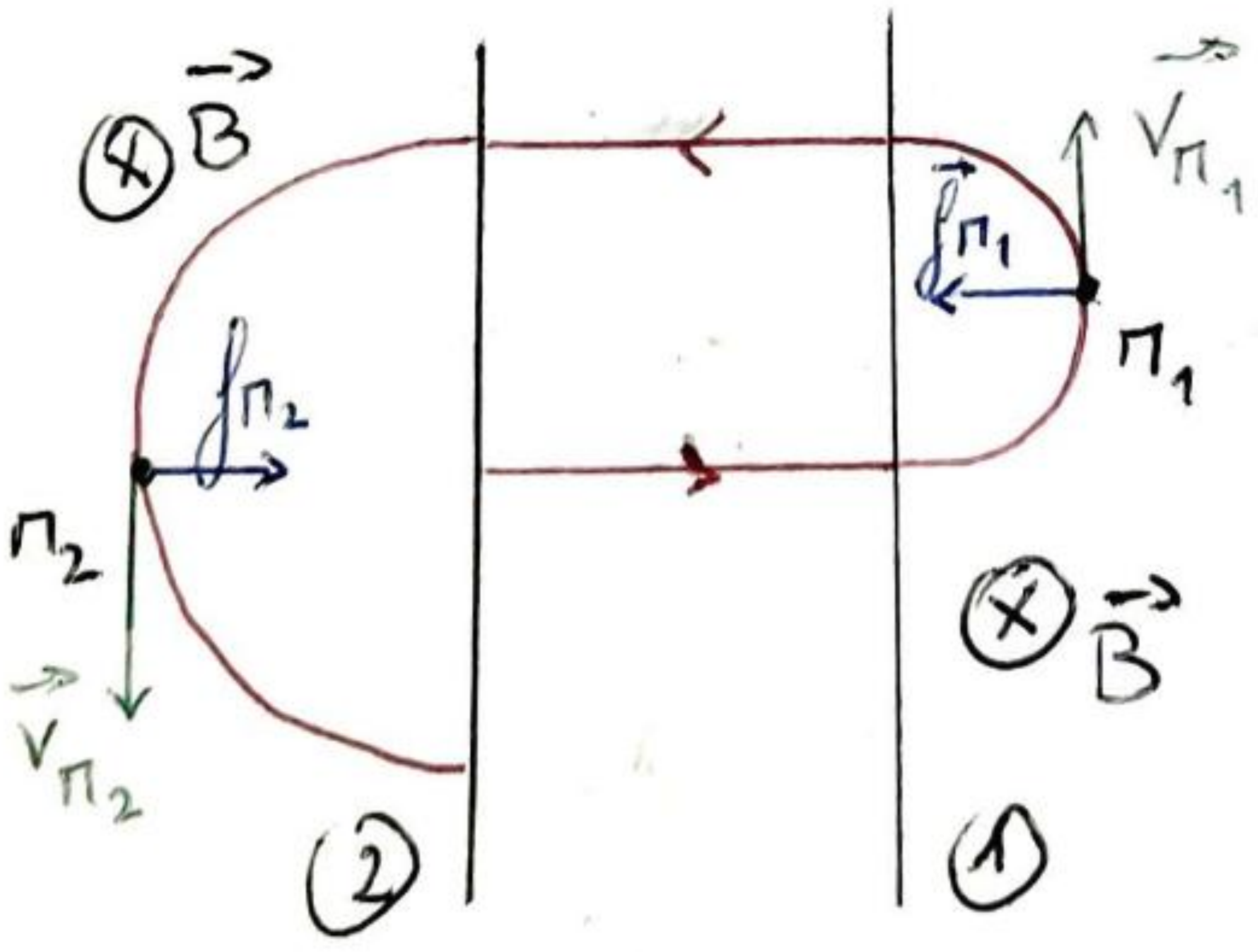
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\cdot \vec{v}$

$$m\, \vec{v}\, \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = 0$ → Ainsi $\boxed{v = cst}$, le mouvement est uniforme.

c.



d. PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q V_y B \vec{e_x} - q V_x B \vec{e_y}$$

Ainsi en projetant sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ il vient :

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = q V_y B \\ m \frac{dV_y}{dt} = -q V_x B \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} - \omega_c V_y = 0 \\ \frac{dV_y}{dt} + \omega_c V_x = 0 \end{cases}} \quad \omega_c = \frac{qB}{m}$$

e. Si on dérive la première equation on a

$$\frac{d^2 V_x}{dt^2} = \omega_c \frac{dV_y}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\omega_c} \frac{d^2 V_x}{dt^2} + \omega_c V_x = 0$$

Ainsi on obtient l'équation de l'oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x = 0}$

$$V_x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

puis $V_y(t) = -A \sin(\omega_c t) + B \cos(\omega_c t)$ $\quad \left(\frac{dV_x}{dt} = \omega_c V_y \right)$

en A : $\begin{cases} V_x(0) = V_1 \\ V_y(0) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = V_1 \\ B = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} V_x = V_1 \cos(\omega_c t) \\ V_y = -V_1 \sin(\omega_c t) \end{cases}}$$

En primitivant il vient :

$$x(t) = \frac{V_1}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \qquad (x(0)=0)$$
$$y(t) = \frac{V_1}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \left(OA - \frac{V_1}{\omega_c}\right) \qquad (y(0) = OA)$$

Ainsi $\boxed{x^2 + \left(y - \left(OA - \frac{V_1}{\omega_c}\right)\right)^2 = \left(\frac{V_1}{\omega_c}\right)^2}$

c'est bien la trajectoire d'un cercle de centre $\left(0, OA - \frac{V_1}{\omega_c}\right)$ et de rayon $\frac{V_1}{\omega_c}$

f. $\boxed{d = \frac{2\pi R_n}{2} = \pi \frac{V_n}{\omega_c}}$

g. $\boxed{\Delta t = \frac{d}{V_n} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{eB}}$ c'est bien indépendant de v_n

2) Etude du mouvement entre les Dees

a. Entre A_0 et A

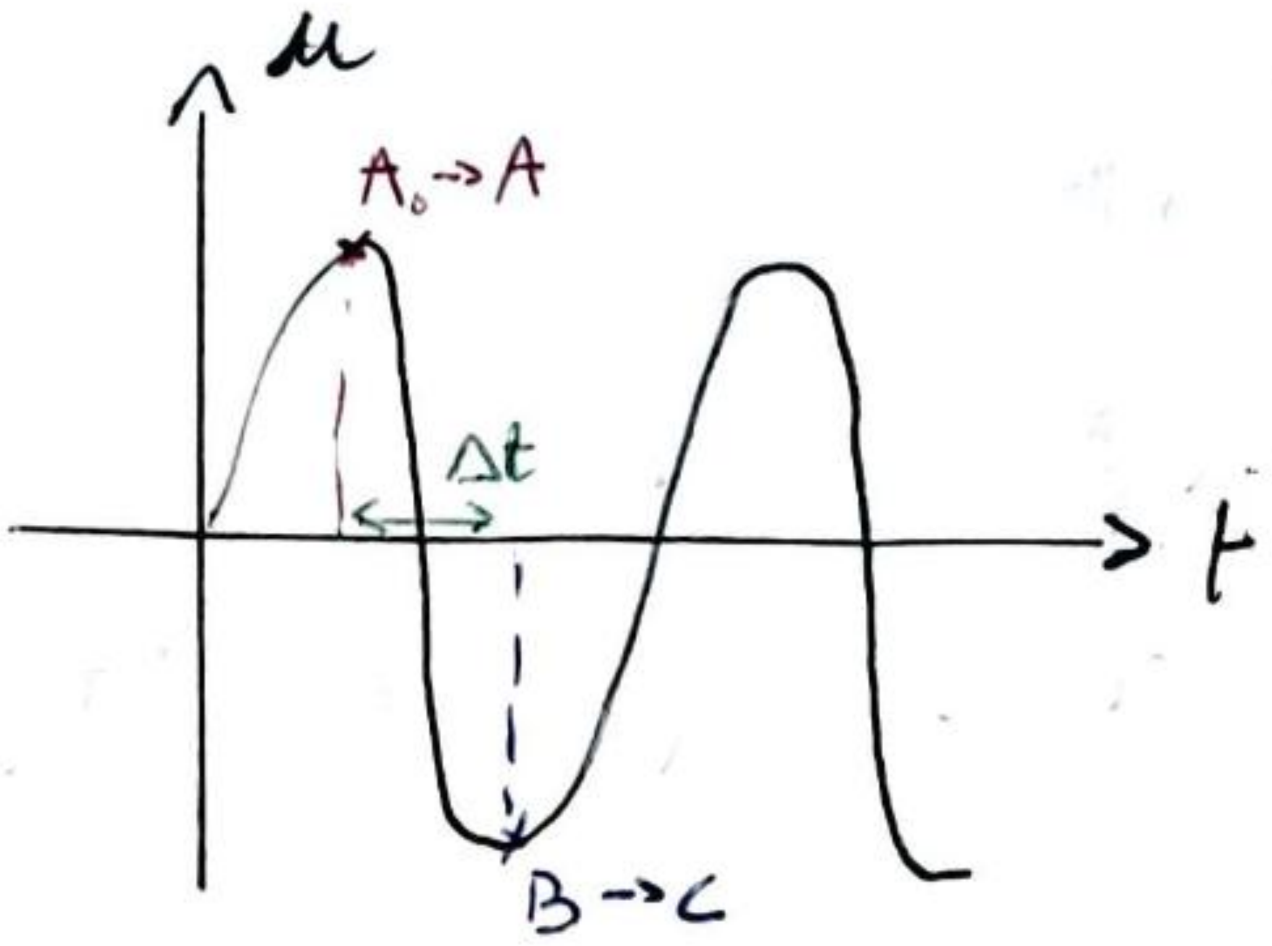
$\vec{F} = q\vec{E}$ et $q > 0$ donc $\boxed{\vec{E} \propto +\vec{e_x}}$

De plus $E = \frac{u}{A_0A}$, $A_0A > 0$ donc $\boxed{u > 0}$

Entre B et C

De même $\boxed{\vec{E} \propto -\vec{e_x}}$ et $\boxed{u < 0}$

b.



c. On a $T = 2\Delta t$ donc $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{eB}{2\pi m}}$

Ex 4 : Mouvement avec frottement

La particule considérée est soumise à la force magnétique ainsi qu'à la force de frottement quadratique exercée par le milieu. L'application du principe fondamental de la dynamique donne : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{k}{m}v\vec{v}$

On multiplie scalairement cette équation par $\vec{v}$. Il vient $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt} = 0 - \frac{k}{m}v^3$ et par conséquent $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2$

Par intégration en séparant les variables, on obtient $-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}dt$, et donc $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m}t$.

On en déduit $\frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0} = \frac{1 + \frac{k}{m}v_0 t}{v_0}$

Finalement, $\boxed{v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m}v_0 t}}$

La vitesse de la particule décroît au cours du temps. Ce résultat était prévisible, puisque la seule force qui travaille est une force dissipative de frottement.

Il faut attendre un temps infini pour que la vitesse s'annule totalement.