FdS

TD4 - Correction

Ex 1 : La partie immergée de l'iceberg

1) Le poids s'applique à tout l'iceberg : $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = \rho_G V \vec{g}}$

La poussée d'Archimède s'applique à la partie imergée : $\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_L V_I \vec{g}}$

On pourrait prendre en compte la poussée d'Archimède de l'air sur l'iceberg $\vec{\Pi}' = \rho_{Air}(V - V_I)\vec{g}$ mais on la néglige ici.

2) L'iceberg est en équilibre donc $\vec{P} = -\vec{\Pi}$

Ainsi $\rho_G V g = \rho_L V_I g$ soit $V_I = \frac{\rho_G}{\rho_L} V$

Soit $x = \frac{V_I}{V}$ la proportion immergée

$\boxed{x = \frac{\rho_G}{\rho_L} = 0,90}$, 90 % de la glace est dans l'eau

Ex 2 : Bataille de boules de neige

1) On applique le PFD à la boule dans le référentiel du sol

$m\vec{a} = \vec{P}$ la projection sur x et z donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

On intègre ces équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{z} = -gt + B \end{cases}$$

La vitesse initiale est $\vec{v}_0$ donc $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha = A \\ \dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha = B \end{cases}$

et $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

Puis $\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \, t + C \\ z(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \, t + D \end{cases}$

A l'instant initial, le point de départ de la boule étant l'origine du repère : $x(0) = z(0) = 0$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha \, t \\ z(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \sin\alpha \, t \end{cases}}$

2) Les boules doivent être ensemble à $t=0$ et à t_F au point $(D, 0)$

$$\begin{cases} x(t_F) = D = V_0 \cos\alpha \, t_F \\ z(t_F) = 0 = -g\frac{t_F^2}{2} + V_0 \sin\alpha \, t_F \end{cases}$$

On a donc $\boxed{t_F = \frac{D}{V_0 \cos\alpha}}$ et $0 = -g\frac{1}{2}\left(\frac{D}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \frac{D}{V_0 \cos\alpha}$

Ainsi $g\frac{D}{2} = V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha$

Or $\cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ donc $2\alpha = \text{Arcsin}\,\frac{gD^2}{V_0^2}$

ou $2\alpha = \pi - \text{Arcsin}\,\frac{gD^2}{V_0^2}$

On a 2 angles entre 0 et $\pi/2$:

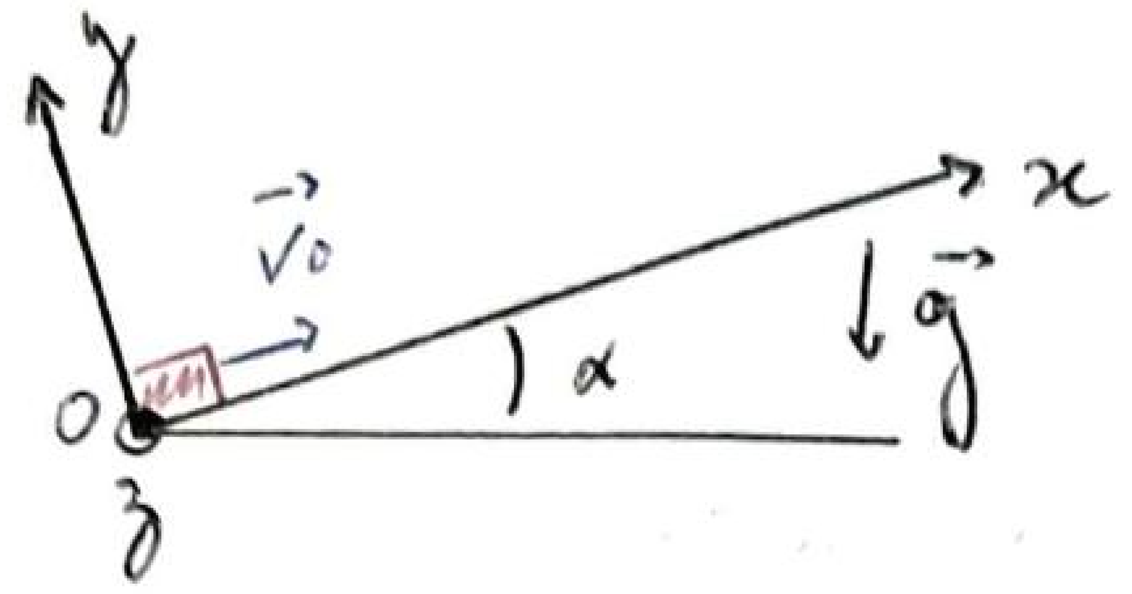
$$\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{gD^2}{V_0^2}\right) = 18{,}9° \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{gD^2}{V_0^2}\right) = 71{,}1° \end{cases}}$$

3) le temps de vol est $t = \frac{D}{V_0 \cos\alpha}$ donc

$$\boxed{\Delta t = \frac{D}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right) = 2{,}54\ s}$$

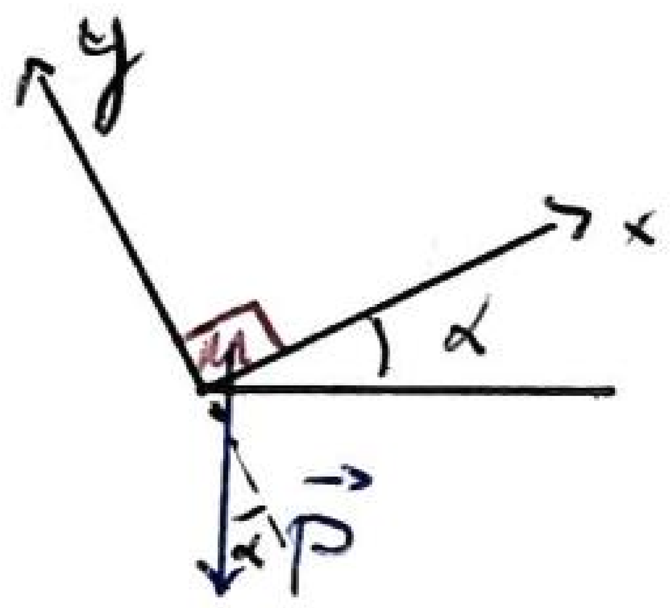
Ex 3 : Brique sur un plan incliné

1) a.



On étudie la brique dans le referentiel du sol galiléen

Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} \\ \vec{R} = \underbrace{R_T\,\vec{e_x}}_{\text{frottement}} + \underbrace{R_N\,\vec{e_y}}_{\text{impenetrabilité}} \end{cases}$



$\vec{P} = -mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

On applique le PFD à la brique sans frottements :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

Projection sur Ox : $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$

Projection sur Oy : $m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + R_N \underbrace{= 0}_{\text{pas de mouvement selon } y}$

On a donc $\boxed{\begin{cases} R_N = mg\cos\alpha \\ \ddot{x} = -g\sin\alpha \end{cases}}$

On intègre l'équation du mouvement avec comme conditions initiales $\begin{cases} \dot{x}(0) = V_0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = -g \sin\alpha \, t + V_0 \\ x(t) = -g \sin\alpha \dfrac{t^2}{2} + V_0 t \end{cases}}$$

b. La brique s'arrête pour $\dot{x}(t_F) = 0$ donc $\boxed{t_F = \dfrac{V_0}{g \sin\alpha}}$

la distance parcourue est $x(t_F) = -\dfrac{V_0^2}{2g\sin\alpha} + \dfrac{V_0^2}{g\sin\alpha} = \boxed{\dfrac{V_0^2}{2g\sin\alpha}}$

AN : $\boxed{\begin{cases} t_F = 0{,}72 \text{ s} \\ x_F = 0{,}86 \text{ m} \end{cases}}$

2) les deux équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin\alpha + R_T \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

On a toujours $\ddot{y} = 0$ donc $R_N = mg\cos\alpha$

De plus la brique glisse donc $R_T = f R_N$ donc

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + f mg\cos\alpha$$

En intégrant il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = -gt(\sin\alpha + f\cos\alpha) + V_0 \\ x(t) = -\frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha + f\cos\alpha) + V_0 t \end{cases}}$$

la brique s'arrête pour $\boxed{t_F' = \frac{V_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$

et la distance parcourue est $\boxed{x_F' = \frac{V_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$

AN : $\boxed{\begin{cases} t_F' = 0{,}46\,s \\ x_A' = 0{,}55\,m \end{cases}}$

Ex 4 : Plateau et ressort

1) Bilan des forces :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)(-\vec{e_z})$

$\vec{F} = k(h - a - l_0)\vec{e_z}$

Réaction du plateau : $\vec{R} = R_x\vec{e_x} + R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}$

2) Le cube est à l'équilibre donc $\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}=\vec{0}$

On projette sur les trois axes :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ -mg - k(h-a-l_0) + R_z = 0 \end{cases}$$

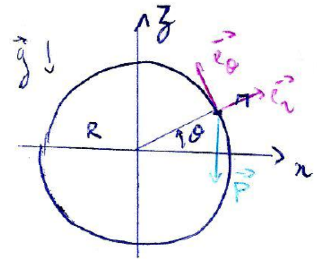
Ainsi $\boxed{R_z = mg - k(h-a-l_0)}$

3) Si $R_z = 0$ alors il n'y a plus de contacte entre le cube et la plaque donc plus d'équilibre

$$R_z(h = h_{max}) = 0 = mg - k(h_{max} - a - l_0)$$

d'où $\boxed{h_{max} = a + l_0 - \frac{mg}{k}}$

Exercice 5 : Chaussette dans un sèche linge



Système $M(m)$ dans $\mathcal{R}$ galiléen.
La chaussette est ici solidaire du tambour au cours de la première phase $OM = R$

a. $\overrightarrow{OM} = R\vec{e_r}$ (R = cst)

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\Omega\vec{e_\theta}$ (Ω = cst)

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$= \underline{-R\Omega^2\vec{e_r}}$

l'accélération de la chaussette est centripète

b. Bilan des forces : • Poids $\vec{P} = m\vec{g} \cdot \sin\theta\,\vec{e_r} - mg\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

• Réaction du support (Tambour)

$\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}$

$= -R_N\vec{e_r} + R_T\vec{e_\theta}$

(les frottements permettent à la chaussette de ne pas glisser)

PFD : $\vec{P} + \vec{R_N} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

Proj $/\vec{e_r}$: $-mg\sin\theta - R_N = -R\Omega^2 \times m$

Proj $/\vec{e_\theta}$: $-mg\cos\theta + R_T = 0$

On a alors $\begin{cases} R_T = mg\cos\theta \\ R_N = mR\Omega^2 - mg\sin\theta \end{cases}$

c. La chaussette décolle du tambour s'il y a rupture de contact, soit pour $R_N = 0$

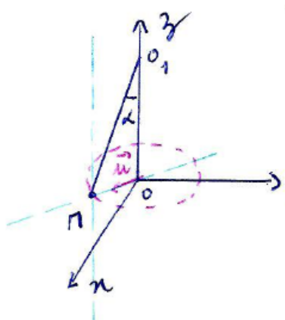
On a alors θ_d qui vérifie $\sin\theta_d = \dfrac{R\Omega^2}{g}$

Cet angle n'existe que si $\Omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$

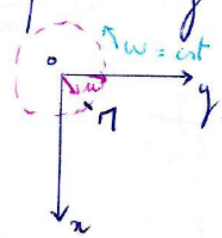
Ici : $\sin\theta_d = \dfrac{25.10^{-2} \times (5{,}23)^2}{9{,}8} = 0{,}7$ soit $\theta_d = 44° = 0{,}77\,\text{rad}$

d. la chaussette a un mouvement ultérieur de chute libre avec vitesse initiale verticale et horizontale → Vol parabolique

Exercice 6 : Pendule conique à deux fils



Dans le plan xOy

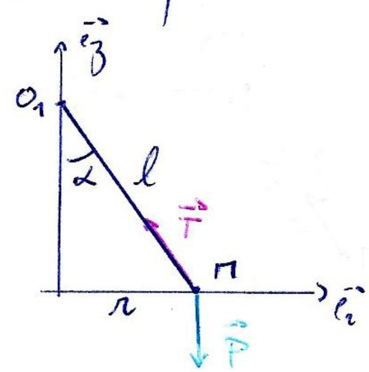


a. Système $M(m)$ dans R_g galiléen

On repère M en cylindrique $\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

(Dans un premier temps $z = 0$)

Dans le plan $(O, \vec{e_r}, \vec{e_z})$



$\vec{OM} = r\vec{e_r} = r\vec{u}$

$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$ car $\ddot{\theta} = 0$

Bilan des forces

- Poids $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$
- Tension $\vec{T} = -T\sin\alpha\,\vec{e_r} + T\cos\alpha\,\vec{e_z}$

On note $r = l\sin\alpha$; $\dot{\theta} = \omega$

Ainsi $\vec{a}(M) = -(l\sin\alpha)\omega^2\vec{e_r}$

On peut désormais appliquer le PFD : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

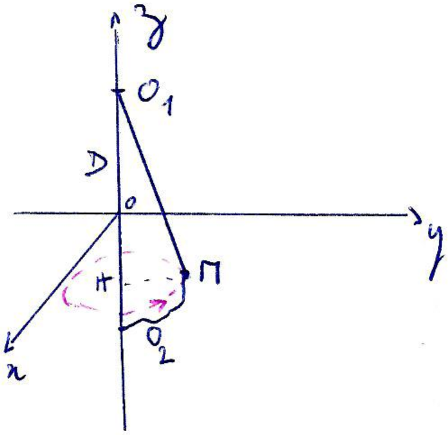
Proj $/\vec{e_r}$: $0 - T\sin\alpha = -m(l\sin\alpha)\omega^2$

Proj $/\vec{e_z}$: $-mg + T\cos\alpha = 0$

Il vient $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ et $\omega^2 = \dfrac{T}{ml} = \dfrac{mg}{ml\cos\alpha}$

ou encore $\cos\alpha = \dfrac{g}{l\omega^2}$

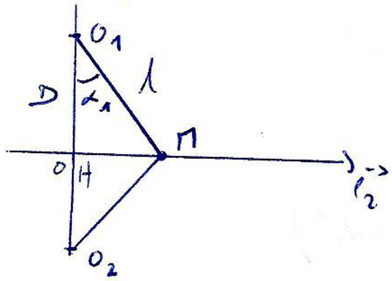
b. On a maintenant 2 fils qui relient M à 2 points distincts de l'axe Oz :



Soit H le projeté orthogonal de M sur (Oz)

Pour de faibles valeurs de ω (M tourne lentement) seul le premier fil (attaché à O_1) est tendu. $OH = l\cos\alpha \sim l$

- Tant que le 2^e fil n'est pas tendu, le bilan des forces de la question précédente reste valable et $\alpha = \arccos \frac{g}{l\omega^2}$, $\alpha \nearrow$ avec ω
- Sitôt le 2^e fil est tendu, le bilan des forces est modifié. On se place à la limite où on a la configuration des 2 fils tendus avec un angle α_1 tel que $\cos\alpha_1 = \frac{D}{l}$ (et $H = O$)

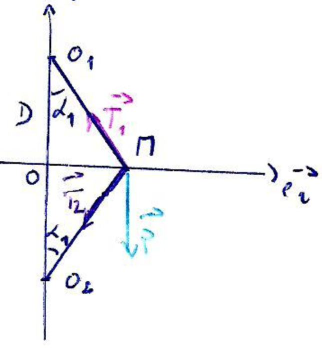


- Pour $\alpha = \alpha_1^-$ (2^e fil pas tout à fait tendu)

$\cos\alpha_1 = \frac{g}{l\omega_1^2}$ et $\cos\alpha_1 \sim \frac{D}{l}$

Ainsi $\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{D}}}$

c. On continue d'augmenter ω au delà de ω_1. L'angle α reste égal à α_1 (2 fils tendus)



- <u>Aspect cinématique</u>

$\vec{OM} = r\vec{e_r} = l\sin\alpha_1\,\vec{e_r}$

$\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = l\omega\sin\alpha_1\,\vec{e_\theta}$ $(\dot{r} = 0)$

$\vec{a}(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r} = -l\omega^2\sin\alpha\,\vec{e_r}$

- Aspect dynamique

Poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$

Tension 1 : $\vec{T_1} = -T_1 \sin\alpha_1\,\vec{e_r} + T_1 \cos\alpha_1\,\vec{e_z}$

Tension 2 : $\vec{T_2} = -T_2 \sin\alpha_1\,\vec{e_r} - T_2 \cos\alpha_1\,\vec{e_z}$

PFD

$$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}$$

Proj $/\vec{e_r}$ $= 0 - T_1 \sin\alpha_1 - T_2 \sin\alpha_1 = -m l \omega^2 \sin\alpha_1$

Proj $/\vec{e_z}$ $: -mg + T_1 \cos\alpha_1 - T_2 \cos\alpha_1 = 0$

Il vient $T_1 + T_2 = m l \omega^2$

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha_1} = \frac{mgl}{D} = m l \omega_1^2$$

Ainsi
$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{ml}{2}\left(\omega^2 + \dfrac{g}{D}\right) = \dfrac{ml}{2}\left(\omega^2 + \omega_1^2\right) \\ T_2 = \dfrac{ml}{2}\left(\omega^2 - \dfrac{g}{D}\right) = \dfrac{ml}{2}\left(\omega^2 - \omega_1^2\right) \end{cases}$$

On remarque que $T_1 > T_2$

A.N :
$$T_1 = \frac{1 \times 0{,}5}{2}\left(7^2 + \left(\frac{9{,}8}{0{,}3}\right)\right) = 20{,}4\,N$$
$$T_2 = \frac{1 \times 0{,}5}{2}\left(7^2 - \frac{9{,}8}{0{,}3}\right) = 4{,}1\,N$$