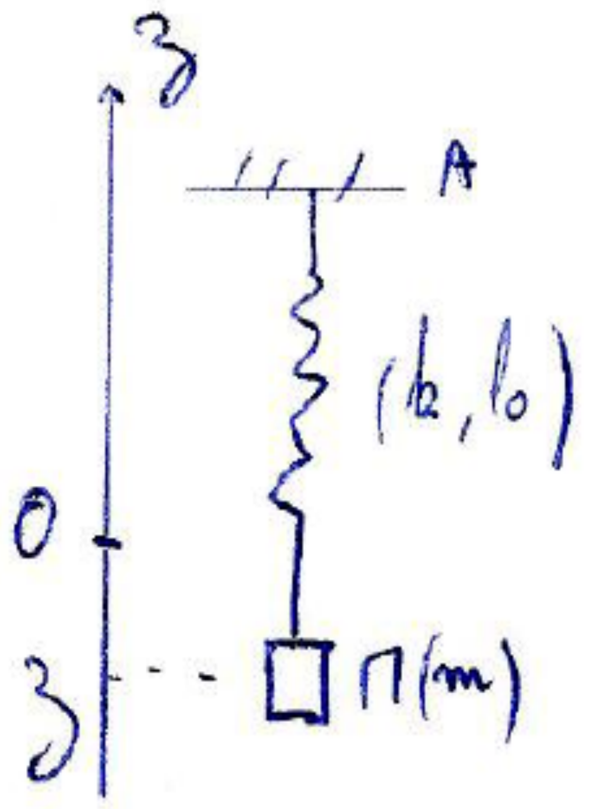
FdS

TD5 - Correction

Ex 1 : Ressort vertical



a. $dE_{pp} = -\delta W(\vec{P})$

$= -\vec{P} \cdot d\vec{OM}$

$\vec{P} = -mg\vec{e_z}$ et $d\vec{OM} = dz\,\vec{e_z}$

$\rightarrow dE_{pp} = mg\,dz \rightarrow \underline{E_p = mgz + C_1}$

b. Energie potentielle élastique

$dE_{pk} = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$

Avec $\vec{F} = -k(l - l_0)(-\vec{e_z})$, $d\vec{OM} = dz\,\vec{e_z} = dl(-\vec{e_z})$

Si le ressort est étiré ($dl > 0$) c'est que $d\vec{OM}$ est orienté selon $-\vec{e_z}$. On peut aussi voir que $l = z_A - z_M$ d'où $dl = -dz$

$\rightarrow dE_{pk} = k(l - l_0)(-\vec{e_z}) \cdot dl(-\vec{e_z})$

$= k(l - l_0)\,dl$

$\underline{E_{pk} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C_2}$

c. Lorsque le ressort est à l'équilibre $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

Soit $-mg + k(l_{eq} - l_0) = 0$

D'où $l_{eq} = l_0 + \dfrac{mg}{k}$ (ressort étiré)

d. On pose $u = l - l_{eq}$ soit $l = u + l_{eq} = z_A - z$

soit $z = z_A - u - l_{eq}$

$E_{pk} = \frac{1}{2} k (u + l_{eq} - l_0)^2 + C_2$

$E_{pp} = mg(z_A - u - l_{eq}) + C_1$

$E_{P_{tot}} = E_{pk} + E_{pp} = \frac{1}{2} k u^2 + k u (l_{eq} - l_0) + \frac{1}{2} k (l_{eq} - l_0)^2 + C_2 - mgu + mg(z_A - l_{eq}) + C_1$

$E_{P_{Tot}} = \frac{1}{2} k u^2 + k u \frac{mg}{k} - mgu + C_3$

$E_{P_{tot}} = \frac{1}{2} k u^2 + C_3$

la constante est nulle si on prend la référence à la position d'équilibre de la masse

$\therefore E_{P_{tot}} = \frac{1}{2} k u^2$

Ex 2 : Cycliste du Tour de France

1) On applique le théorème de la puissance cinétique au système "cycliste + vélo" dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : • $\vec{P} = m\vec{g} \rightarrow \mathcal{P}(\vec{P}) = -mg\vec{e_z}.v\vec{e_x} = 0$

• Frottement de l'air : $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$

$\hookrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) = -\lambda v \vec{v}.\vec{v} = -\lambda v^3$

• Reaction du support : $\vec{R}$

$\hookrightarrow \mathcal{P}(\vec{R}) = R\vec{e_z}.v\vec{e_x} = 0$

• Force motrice $\rightarrow \mathcal{P}$

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}$$

Avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ on a $\frac{dE_c}{dt} = mv\frac{dv}{dt}$ donc :

$$\boxed{mv\frac{dv}{dt} = -\lambda v^3 + \mathcal{P}}$$

On ne sait pas résoudre cette équation différentielle

2) On remplace $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

On a alors $m v^2 \frac{dv}{dx} = \mathcal{P} - \lambda v^3 = \lambda (V_\ell^3 - v^3)$

en posant $\boxed{V_\ell = \left(\frac{\mathcal{P}}{\lambda}\right)^{1/3}}$

En régime permanent $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $\frac{dv}{dx} = 0$ et $V_\ell = V$

Ve est la vitesse limite en régime permanent.

3) V_ℓ est une constante donc $\frac{df}{dx} = -3\lambda v^2 \frac{dv}{dx}$

Ainsi $v^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3\lambda}\frac{df}{dx}$ et l'équation devient

$$\boxed{\frac{df}{dx} + \frac{3\lambda}{m} f = 0}$$

4) On pose $\boxed{L = \frac{m}{3\lambda}}$, on a alors $f(x) = A e^{-x/L}$

à $t=0$, $x=0$ et $v = V_0$ donc $f(0) = \lambda(V_\ell^3 - V_0^3) = A$

Ainsi $f(x) = \lambda(V_\ell^3 - V_0^3)e^{-x/L}$

$$\lambda\left(V_\ell^3 - v(x)^3\right) = \lambda\left(V_\ell^3 - V_0^3\right)e^{-x/L}$$

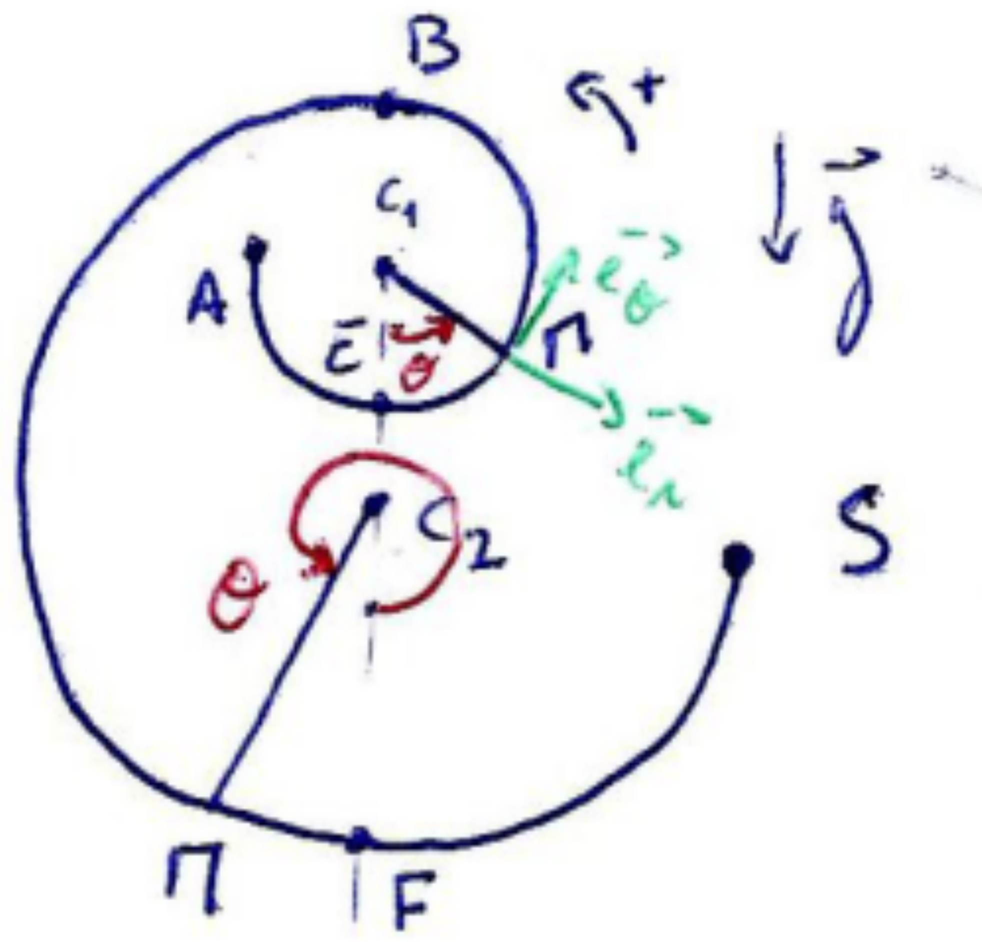
D'où $\boxed{v(x) = \left(V_\ell^3 - (V_\ell^3 - V_0^3)e^{-x/L}\right)^{1/3}}$

5) $\boxed{\lambda = \frac{\mathcal{P}}{V_\ell^{3}} = 0{,}25\ kg.m^{-1}}$

$\boxed{L = \frac{m}{3\lambda} = 110\ m}$

Ve est atteint après quelques L, c'est donc assez long d'atteindre la vitesse limite.

Ex 3 : Mouvement d'un anneau sur une piste circulaire



a. Système $\Pi(m)$ dans R_g

Partie 1 : $\overrightarrow{C_1\Pi} = R_1 \vec{e_r}$ $\qquad d\overrightarrow{C_1\Pi} = R_1 d\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{V_1} = R_1 \dot{\theta}\, \vec{e_r}$

Partie 2 : $\overrightarrow{C_2\Pi} = R_2 \vec{e_r}$ $\qquad d\overrightarrow{C_2\Pi} = R_2 d\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{V_2} = R_2 \dot{\theta}\, \vec{e_\theta}$

Poids : $\vec{P} = mg\,\vec{e_3} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

Travail : $\delta W(\vec{P}) = \vec{P}.\,d\overrightarrow{O\Pi} \rightarrow$ Partie 1 : $\delta W_1(\vec{P}) = -mg R_1 \sin\theta\, d\theta$

Partie 2 : $\delta W_2(\vec{P}) = -mg R_2 \sin\theta\, d\theta$

Energie potentielle : $dE_p = -\delta W(\vec{P})$

* <u>Partie 1</u> : $dE_p = mgR_1 \sin\theta\, d\theta$

$E_{p_1} = -mgR_1 \cos\theta + C_1$

Ref de E_p en $\theta = \pi$ → $E_p(\theta=\pi) = mgR_1 + C_1 = 0$

↳ $C_1 = -mgR_1$

$\underline{E_{p_1} = -mgR_1(1+\cos\theta)}$

* <u>Partie 2</u> : $dE_p = mgR_2 \sin\theta\, d\theta$

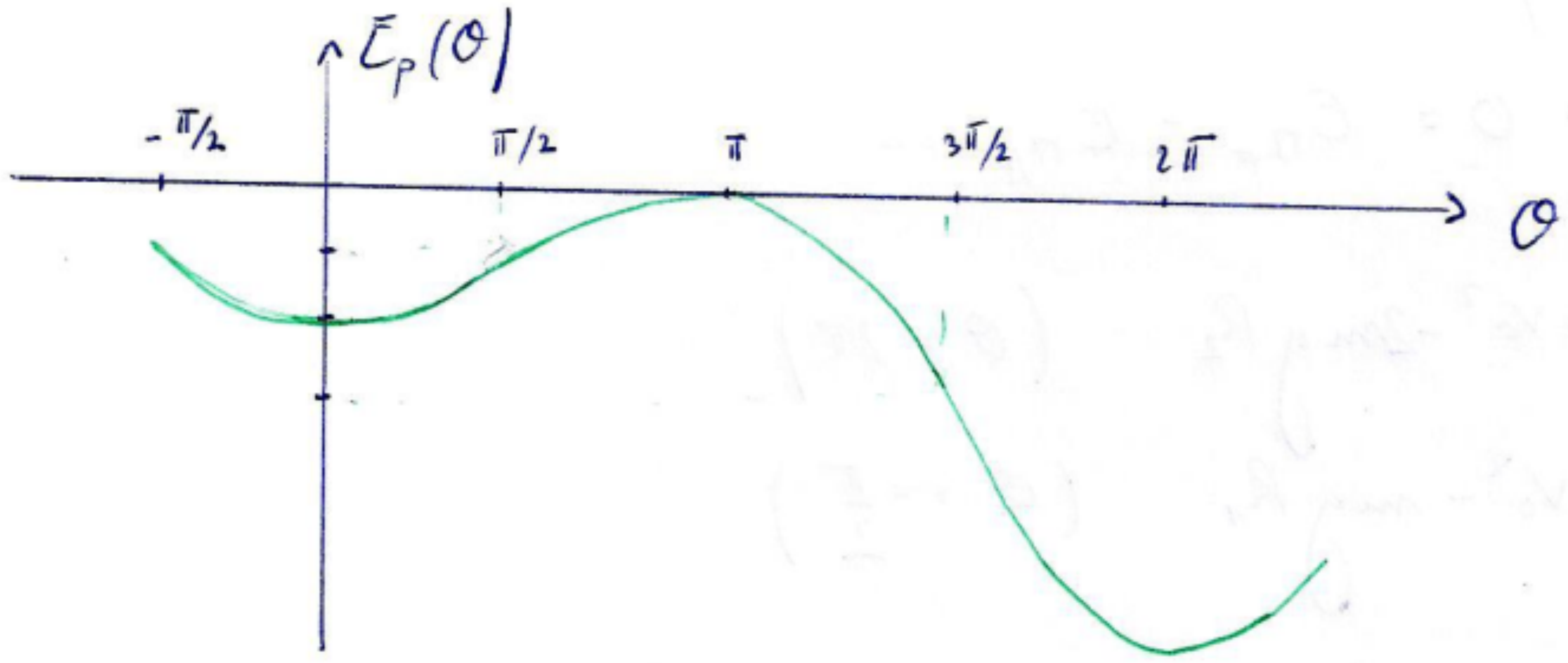
$E_{p_2} = -mgR_2 \cos\theta + C_2$

Ref de E_p en $\theta = \pi$ → $E_p(\theta=\pi) = mgR_2 + C_2 = 0$

↳ $C_2 = -mgR_2$

$\underline{E_{p_2} = -mgR_2(1+\cos\theta)}$

b.



c. Il y a 3 positions d'équilibre → $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$

$\frac{dE_{p_1}}{d\theta} = mgR_1 \sin\theta$ | $\frac{dE_{p_2}}{d\theta} = mgR_2 \sin\theta$

$\frac{d^2E_{p_1}}{d\theta^2} = mgR_1 \cos\theta$ | $\frac{d^2E_{p_2}}{d\theta^2} = mgR_2 \cos\theta$

$\rightarrow$ $\theta_1 = 0$: stable
$\theta_2 = \pi$: instable
$\theta_3 = 2\pi$: stable

d. i/ l'anneau peut atteindre F s'il a suffisamment d'énergie pour franchir la barrière d'E_p en B ($\theta = \pi$)

A la limite : $E_c(B) = 0$

D'après le TEC : $E_c(B) - E_c(A) = \vec{P} \cdot \vec{AB}$

A la limite $-\frac{1}{2} m V_0^2 = -mgR_1$

il faut donc $\underline{V_0 \geq \sqrt{2gR_1}}$

ii/ On applique le TEM

$$\Delta E_m = 0 = E_{M_F} - E_{M_A}$$

$E_{M_F} = \frac{1}{2} m v_F^2 - 2mgR_2 \quad (\theta = 2\pi)$

$E_{M_A} = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgR_1 \quad (\theta = -\frac{\pi}{2})$

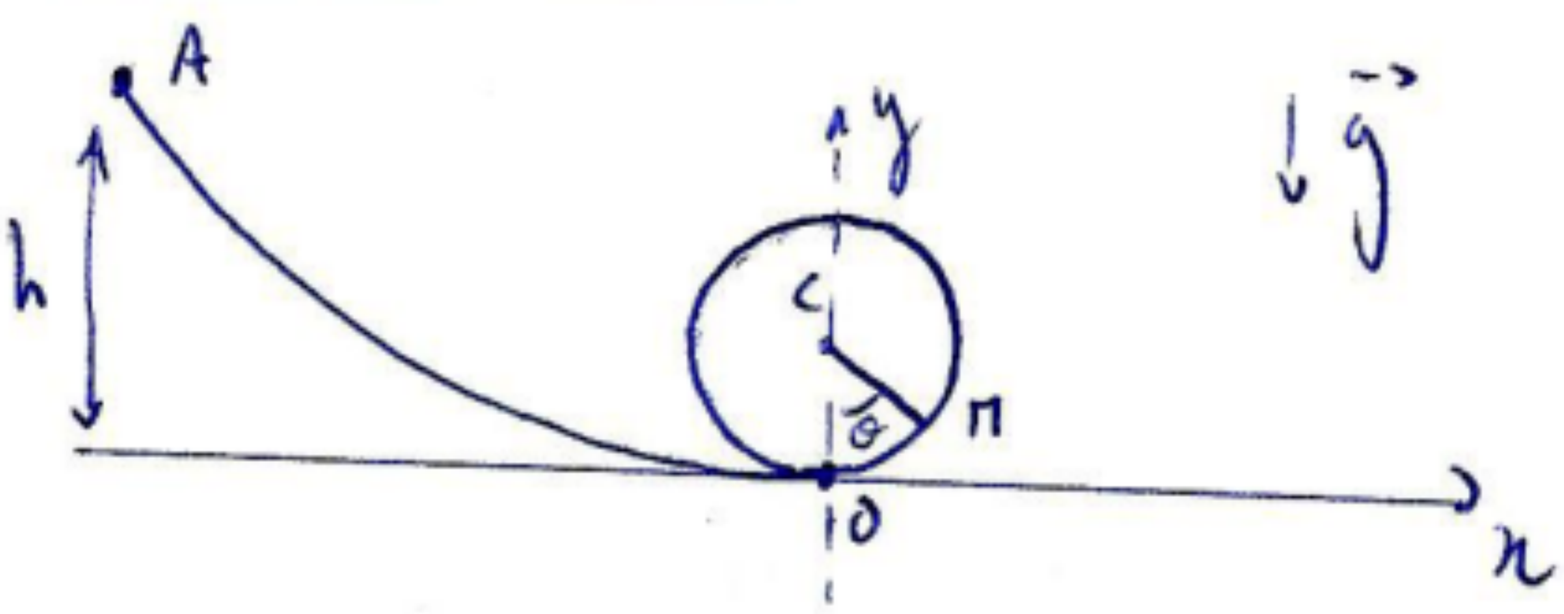
$\rightarrow \frac{1}{2} m v_F^2 - 2mgR_2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + mgR_1 = 0$

$$\underline{V_F^2 = V_0^2 + 2g(2R_2 - R_1)}$$

iii/ l'anneau sort de la piste s'il arrive en S avec une vitesse non nulle.

Si le mobile arrive en B il a assez d'energie pour dépasser S, il suffit donc que $\underline{v_0 \geq \sqrt{2gR_1}}$

Ex 4 : Acrobaties



a. Système $M(m)$ dans R_g

Première partie du mouvement (entre A et O)

TEC : $\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \vec{P}.\vec{AO} = mgh$

S'il part de A sans vitesse initiale ($v_A = 0$) alors $\underline{v_0 = \sqrt{2gh}}$

b. Appliquons le TEC entre O et M

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \vec{P}.\vec{OM} = -mga(1-\cos\theta)$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = a\vec{e_y} - a\cos\theta\vec{e_y} + a\cos\theta\vec{e_x} \\ \vec{P} = -mg\vec{e_y} \end{array} \right)$$

Par conséquent $v^2 = v_0^2 - 2ga(1-\cos\theta)$

$$\underline{v = \sqrt{2gh - 2ga(1-\cos\theta)}}$$

c. $\begin{cases} \vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = a\vec{e_y} + a\vec{e_r} \\ \vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e_r} + a\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = -\frac{v^2}{a}\vec{e_r} + a\ddot{\theta}\vec{e_\theta} \end{cases}$

Bilan des forces

$\vec{P} = -mg\vec{e_y} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{R} = -R\vec{e_r}$

PFD : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

$/\vec{e_r}$: $-R + mg\cos\theta = -\frac{v^2}{a}m$

$/\vec{e_\theta}$: $-mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}$

On a donc $R = \frac{mv^2}{a} + mg\cos\theta$

$$R = m\left(\frac{2gh}{a} + \frac{2ga}{a}(\cos\theta - 1) + g\cos\theta\right)$$

D'où $\underline{R = mg\left(3\cos\theta - 2 + \frac{2h}{a}\right)}$

d. Si v s'annule avec $\vec{R}$ non nul, le patineur rebrousse chemin sans perte de contact avec le cylindre

Si $\vec{R}$ s'annule avec v non nulle, le patineur décolle du cylindre.

e. Pour pouvoir faire le tour du cylindre, il faut :

1) que v soit non nul pour $\theta = \pi$

2) que $\vec{R}$

Condition 1 : $v(\theta=\pi) = \sqrt{2gh + 2ga(\cos\pi - 1)}$ doit exister

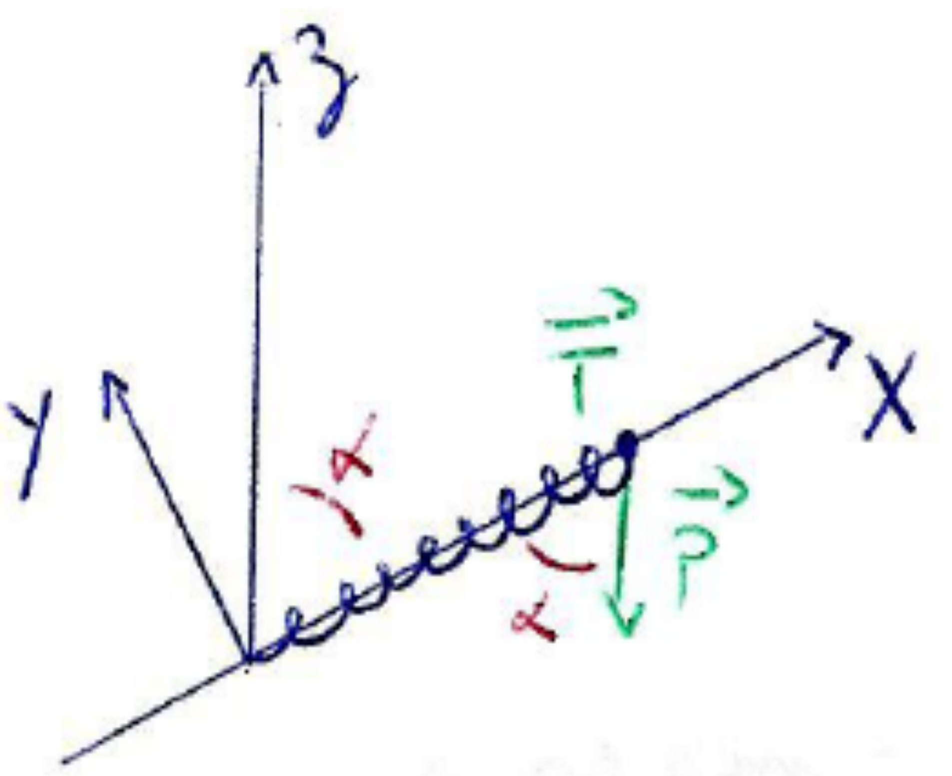
$\rightarrow h_{min} = 2a$

Condition 2 : $R(\theta=\pi) = mg\left(3\cos\pi - 2 + \frac{2h}{a}\right) > 0$

$\rightarrow h'_{min} = \frac{5}{2}a$

La condition 2 est plus contraignante, il faut donc $h > \frac{5}{2}a$

Ex 5 : Tige avec ressort



$\rightarrow$ Système $M(m)$ dans R_g

$\rightarrow \vec{OM} = X\vec{e_X}$ $\quad d\vec{OM} = dX\vec{e_X}$

$\vec{v}(M) = \dot{X}\vec{e_X}$ $\quad E_c = \frac{1}{2}m\dot{X}^2$

$\vec{a}(M) = \ddot{X}\vec{e_X}$

Bilan des forces

$\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\vec{e_X} - mg\sin\alpha\,e_Y$

$\vec{T} = -k(l - l_v)\vec{e_X} = -k(X - l_v)\vec{e_X}$

$\vec{R} = R_T\vec{e_X} + R_N\vec{e_Y} = R_N\vec{e_Y}$ (pas de frottements : $R_T = 0$)

a. Forces conservatives : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

E_{pp} : $dE_{pp} = -\delta W(\vec{P}) = -\vec{P}\cdot d\vec{OM} = mg\cos\alpha\, dX$

$E_{pp} = mg\cos\alpha\, X + C_1$

$$dE_{pk} = -\delta W(\vec{T}) = -\vec{T}\cdot d\vec{OM} = k(l - l_v)\,dX$$

Avec $l = X$ on a $dl = dX$

$$E_{pk} = \frac{1}{2}k(X - l_v)^2 + C_2$$

b. <u>TEM</u>

$\Delta E_m = 0$ (que des forces conservatives)

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pk} = E_{m_0}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mg\cos\alpha\, X + C_1 + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2 + C_2 = E_{m_0}$$

En dérivant par rapport à t :

$$m\dot{X}\ddot{X} + mg\cos\alpha\,\dot{X} + k\dot{X}(X - l_v) = 0$$

En dérivant par rapport à t :

$$m\dot{X}\ddot{X} + mg\cos\alpha\,\dot{X} + k\dot{X}(X - l_v) = 0$$

en simplifiant par $\dot{X}$: $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = k l_v - g\cos\alpha$

c. i/ $E_p(X) = mg\cos\alpha\, X + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2 + C_3$

$$E_p(X) = \frac{1}{2}kX^2 + (mg\cos\alpha - k l_v)X + C_4$$

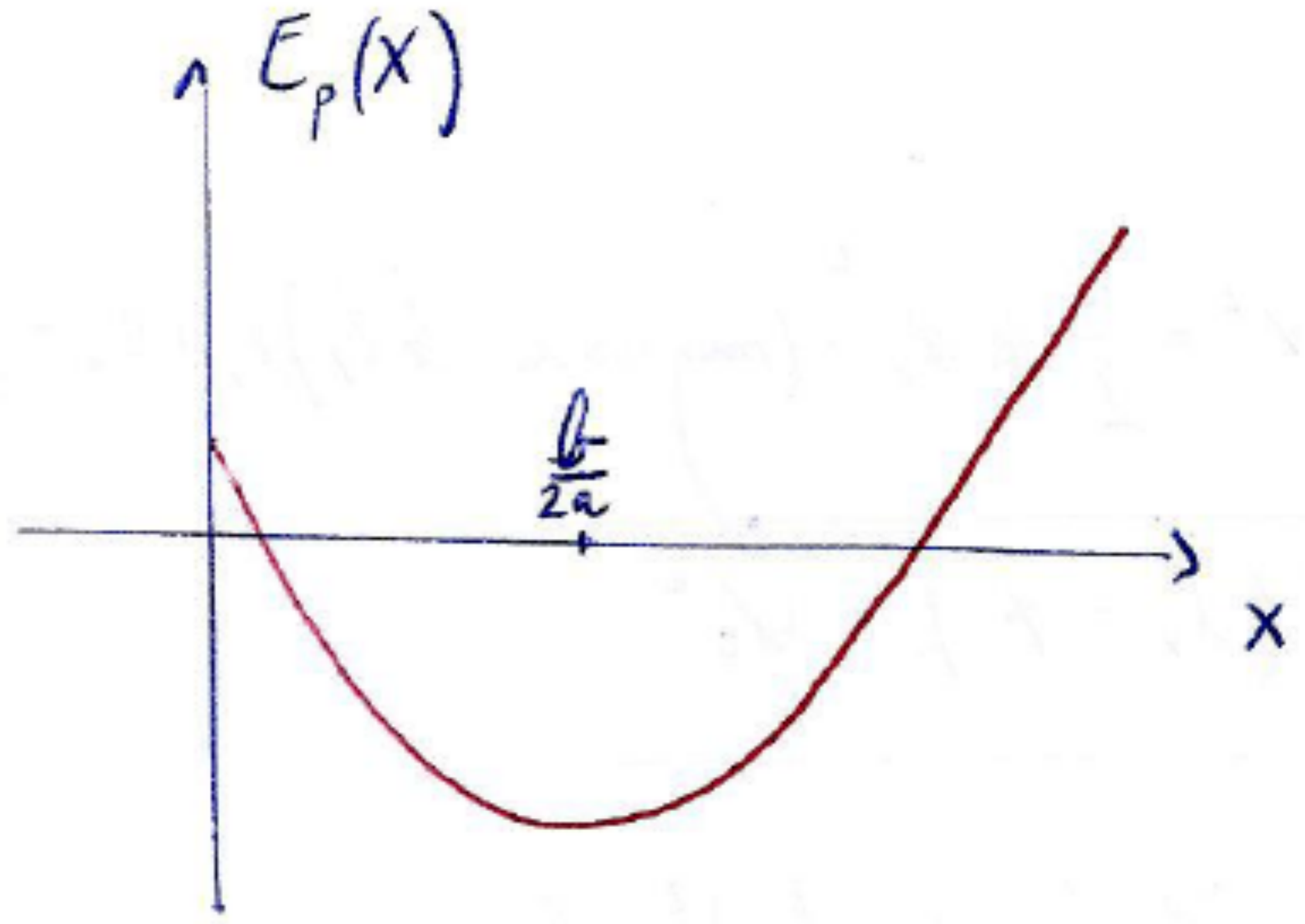
Si $mg\cos\alpha < k l_v$ alors $E_p(X) = aX^2 - bX + c$

avec $(a, b, c) > 0$

$$\frac{dE_p}{dX} = 2aX - b$$

$$\frac{d^2E_p}{dX^2} = 2a$$

X	0		$+\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\frac{d^2E_p}{dX^2}$			$+$		
$\frac{dE_p}{dX}$		$-$ ↗	0	$+$ ↗	
E_p		↘	$-\frac{b^2}{\dots} + c$	↗	



la fonction $E_p(X)$ admet un min pour $X_e = \frac{b}{2a} > 0$

$$\boxed{X_e = \frac{kl_v - mg\cos\alpha}{k} = l_v - \frac{mg\cos\alpha}{k}}$$

ii/ On choisit $X_0 = l_v$ et $\dot{X}(t=0) = V_0$

Pour que le mouvement puisse être une oscillation entre $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$, il faut $E_m = E_p(X_1) = E_p(X_0) + E_c(V_0) = E_p(X_2)$ car E_c nulle en X_1 et X_2

à la limite $X_1 = 0$ et $E_p(X_1) = C_4$

$$C_4 = \frac{1}{2}kX_0^2 + (mg\cos\alpha - kl_v)X_0 + C_4 + \frac{1}{2}mV_{0,max}^2$$

$$\rightarrow V_{0,max}^2 = -\frac{k}{m}X_0^2 - \frac{2}{m}(mg\cos\alpha - kl_v)X_0 \quad \text{avec } X_0 = l_v$$

$$V_{0,max}^2 = -\frac{k}{m}l_v^2 - 2g\cos\alpha\, l_v + \frac{2kl_v}{m}$$

$$V_{0,max}^2 = \frac{k}{m}l_v\left(l_v - \frac{2mg}{k}\cos\alpha\right)$$

$$V_{0,max} = \sqrt{\frac{k}{m}l_v\left(l_v - \frac{2mg}{k}\cos\alpha\right)}$$

iii/ Pour déterminer $V(X)$ on utilise l'intégrale première du mouvement

$E_m = E_{m_0}$

$\frac{1}{2} k X^2 + (mg\cos\alpha - k l_v) X + C_1 + \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} k l_v^2 + (mg\cos\alpha - k l_v) l_v + C_1 + \frac{1}{2} m V_0^2$

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}(l_v^2 - X^2) + 2\left(g\cos\alpha - \frac{k l_v}{m}\right)(l_v - X) + V_0^2}$$

Si on utilise $E_p(X) = mg\cos\alpha\, X + \frac{1}{2} k (X - l_v)^2 + C_3$

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2g\cos\alpha\,(X - l_v) - \frac{k}{m}(X - l_v)^2}$$

On a établi précédement que : $\ddot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{k}{m} l_v - g\cos\alpha$

La solution recherchée est du type :

$$X(t) = l_v - \frac{mg\cos\alpha}{k} + A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

à $t=0$, $X(0) = l_v = l_v - \frac{mg\cos\alpha}{k} + A$

$\hookrightarrow A = \frac{mg\cos\alpha}{k}$

$\dot{X}(0) = V_0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow B = \sqrt{\frac{m}{k}}\, V_0$

Finalement : $$X(t) = l_v - \frac{mg\cos\alpha}{k} + \frac{mg\cos\alpha}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \sqrt{\frac{m}{k}}\, V_0 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$