OMPP 6
Milieux conducteurs

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

Un milieu **conducteur** contient des **charges libres** susceptibles de se déplacer sur des distances macroscopiques lorsqu'on applique un champ électrique $\vec{E}$. Il apparaît alors courant électrique qui peut localement être décrit par une densité volumique de courant $\vec{j}$.

Les milieux conducteurs usuels sont les **métaux** (ch : 金属 ; eng : metal) et les **électrolytes** (ch : 电解质 ; eng : electrolyte) (solution contenant des ions).

Les milieux *non conducteurs* sont nommés **isolants**. On les appelle aussi parfois **milieux diélectriques** (ch : 电介质 ; eng : dielectric).

1 Milieu conducteur ohmique

1.1 Loi d'Ohm locale

1.1.1 Relation phénoménologique

- **Un milieu est dit ohmique, lorsqu'en tout point M de ce milieu, la relation suivante (dite *loi d'*Ohm [ch : 欧姆定律 ; eng : Ohm's law] *locale*) est vérifiée :**

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \gamma\vec{E}(M,t)}$$

- **La *conductivité* γ (ch : 电导率 ; eng : conductivity) du milieu s'exprime en $\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ ou $\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.**

- **Lorsque le champ électrique est variable, la loi d'Ohm locale reste valable tant que la période temporelle T du champ électrique est telle que $T \gg \tau$ où $\tau \approx 10^{-14}$ s.**

■ Résistivité d'un milieu ohmique

On définit **la résistivité** $\tilde{\rho}$ (ch : 电阻率 ; eng : resistivity) du milieu par $\boxed{\tilde{\rho} \triangleq \dfrac{1}{\gamma}}$ (unité : $\Omega\cdot\mathrm{m}$) qu'on veillera à ne pas confondre avec la densité volumique de charges ρ !

■ Ordres de grandeur

Dans les métaux et aux températures usuelles, la conductivité a pour ordre de grandeur $\gamma \sim 10^7$ S.m^{-1}. La figure 1 représente la courbe de variation de la résistivité $\tilde{\rho}$ en fonction de la température T. On constate que :

- elle croît avec la température. [a]
- il existe une *température critique* $T_C \approx 90$ K au dessous de laquelle la résistivité est nulle : c'est le phénomène de *supraconductivité* (ch : 超导现象 ; eng : superconductivity). Tous les métaux présentent le phénomène de supraconductivité mais leur température critique est faible (4,2 K pour le mercure de symbole chimique Hg, 7 K pour le plomb de symbole chimique Pb). D'autres matériaux dit *matériaux supraconducteurs à haute température* (ch : 高温超导体 ; eng : high-temperature superconductor) présentent une température critique au-dessus de 40 K.

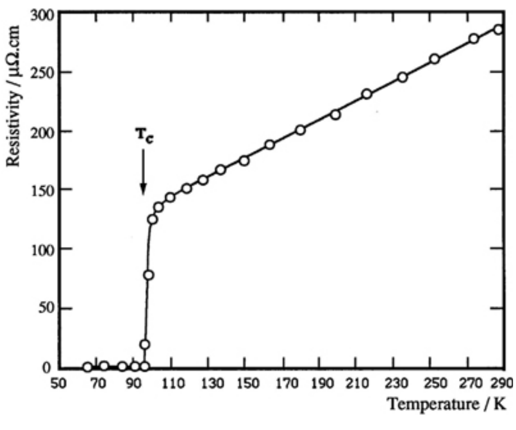


Figure 1 – Allure de $T \to \tilde{\rho}(T)$ pour un matériau supraconducteur $YBa_2Cu_3O_7$

[a] L'interprétation microscopique est la suivante : sous l'effet de l'augmentation de la température, les collisions des électrons libres avec le réseau de cations croît ce qui augmente la résistivité.

Les milieux isolants ne sont pas complètement «non-conducteurs» : ils peuvent être ohmiques mais avec une fort mauvaise conductivité. Typiquement $\gamma \sim 10^{-12}$ S.m^{-1} pour l'air (mais l'humidité influe fortement) et $\gamma \sim 10^{-16}$ S.m^{-1} pour les meilleurs isolants.

1.1.2 Interprétation microscopique : le modèle de Drude

■ Le physicien allemand Paul Drude (1863 - 1906) propose en 1900 un modèle microscopique (modèle de Drude : 德鲁德模型) qui puisse rendre compte des propriétés thermiques, optiques et électriques de la matière. Nous nous proposons ici de reprendre le modèle qui rend compte de la loi d'Ohm locale en régime statique.

Un métal comme le cuivre est modélisé par un ensemble d'*ions positifs* Cu^+ disposés régulièrement aux nœuds d'un *réseau cristallin* (晶体结构) : les ions oscillent autour de leur position d'équilibre mais ne peuvent se déplacer librement. En première approximation, les électrons sont libres de se déplacer dans le réseau cristallin (on les nomme *électrons libres* ou *électrons de conduction*) mais les électrons subissent des interactions avec le réseau cristallin avec lequel ils échangent de l'énergie. [a]

Lorsque l'on soumet un conducteur à une différence de potentiel, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ accélère les charges libres ce qui provoque l'apparition d'un vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$.

[a] L'énergie cinétique fournie par les électrons se retrouve sous forme de vibrations collectives du réseau d'ions positifs.

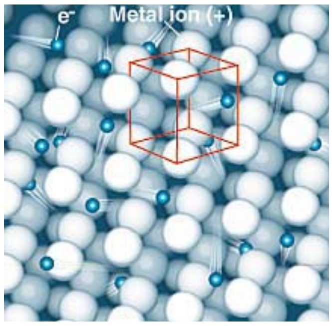


Figure 2 – Électrons dans le réseau d'ions

■ **Hypothèses d'étude**

Les hypothèses du modèle de Drude sont les suivantes :

- la **neutralité locale** est assurée ; on note n_0 les densités volumiques d'ions et d'électrons, supposées égales et **uniformes**.
- les interactions entre les *électrons de conduction* et les *ions du réseau* sont modélisées par une force de frottement fluide qui s'exprime, pour un électron sous la forme :

$$\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}(M) \text{ où } \overrightarrow{v}(M) \text{ désigne la vitesse d'un électron situé en M}$$

- les *électrons libres* sont soumis à un champ électrique uniforme et permanent noté $\overrightarrow{E}$

✎ Compte tenu de ces hypothèses, appliquer le PFD à un électron et en déduire l'expression de sa vitesse en fonction du temps. Que devient cette expression au bout d'un temps long ?
En déduire la loi d'Ohm locale et l'expression de γ.

Pour un electron : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$ d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$

c'est une équation differentielle du premier ordre à coefficients constants

La solution homogène est $\vec{v}_H = \vec{A}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$

Une solution particulière est $\vec{v}_p = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

Ainsi $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{A}\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q\tau}{m}\vec{E}}$ avec $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$

Pour un temps long $(t \gg \tau)$: $\vec{v}(t) \sim \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

Or $\vec{j} = n_0 q \vec{v}$ donc $\vec{j} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m}\vec{E}$

On pose $\boxed{\gamma = \frac{n_0 q^2 \tau}{m}}$ et on obtient la loi d'ohm locale :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$

1.2 Densité volumique de charges à l'intérieur d'un conducteur ohmique

Dans un métal, lorsque la loi d'Ohm est applicable, la densité volumique de charges est nulle :

$$\boxed{\rho(M,t) = 0}$$

✎ A l'aide de la loi de conservation de la charge et de la loi d'Ohm locale entre autre, montrer que la densité volumique de charge évolue exponentiellement.
Calculer le temps caractéristique de variation, et en déduire qu'on peut considérer que la densité volumique de charges est nulle dans un métal.

On a $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$, or $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma\, \text{div}\,\vec{E} = 0$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$ soit $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\gamma t}{\varepsilon_0}} = \rho_0 e^{-t/\tau'}$ avec $\tau' = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$

Pour un métal $\tau' = \frac{8{,}85.10^{-12}}{10^{7}} = 10^{-18}\,s$ or $\rho(t) \xrightarrow[t \gg \tau']{} 0$ donc $\rho \sim 0$

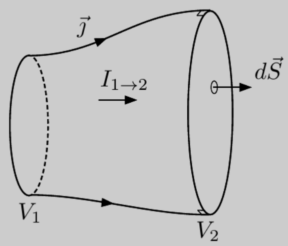
1.3 Loi d'Ohm intégrée

1.3.1 Définition de la résistance d'une portion de conducteur ohmique

La portion de conducteur coïncidant avec le volume du tube de courant situé entre deux surfaces équipotentielles $(\mathcal{S}_i)$ portées au potentiel V_i (où $i = 1, 2$) possède une résistance R définie par :

$$\boxed{R \triangleq \frac{V_1 - V_2}{I_{1\to 2}}} \quad \textbf{(unité : } \Omega\textbf{)}$$

$I_{1\to 2}$ désigne l'intensité du courant traversant le tube : elle comptée positivement de $(\mathcal{S}_1)$ vers $(\mathcal{S}_2)$.



1.3.2 Propriété

La résistance R de la portion de conducteur ohmique ne dépend que de la géométrie des lignes de courant et de la conductivité γ. Elle est toujours positive.

■ En effet, d'une part,

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 -dV = \int_1^2 \underbrace{-\overrightarrow{grad}V(M)}_{=\vec{E}(M)} \cdot d\overrightarrow{M} = \int_1^2 \frac{\vec{j}(M)}{\gamma} \cdot d\overrightarrow{M}$$

D'autre part, en *régime stationnaire*, le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ est à flux conservatif ($\text{div}\,\vec{j}(M) = 0$) ce qui implique *que le flux du vecteur densité de courant à travers toute section du tube de courant est le même* :

$$I_{1\to 2} = \iint_{M\in(\mathcal{S})} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_{1\to 2}(M) \text{ où } (\mathcal{S}) \text{ désigne toute section du tube de courant}$$

Ainsi :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1\to 2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_1^2 \overrightarrow{j}(M)\cdot d\overrightarrow{M}}{\iint\limits_{M\in(S)} \overrightarrow{j}(M)\cdot d\overrightarrow{S}_{1\to 2}(M)}$$

■ En faisant la transformation $\overrightarrow{j} \to \lambda \overrightarrow{j}$ ce qui revient à **ne pas modifier les lignes de courant tout en augmentant** $\left\|\overrightarrow{j}\right\|$, on s'aperçoit que la valeur de R est inchangée. Cela signifie que **le rapport des intégrales ne dépend que de la géométrie des lignes de courant et non pas de la valeur de** $\left\|\overrightarrow{j}\right\|$.

Remarque : Cette relation démontrée en *régime statique* demeure valable en régime «lentement» variable (c'est-à-dire dans le cadre de *l'approximation des régimes quasi-permanents*).

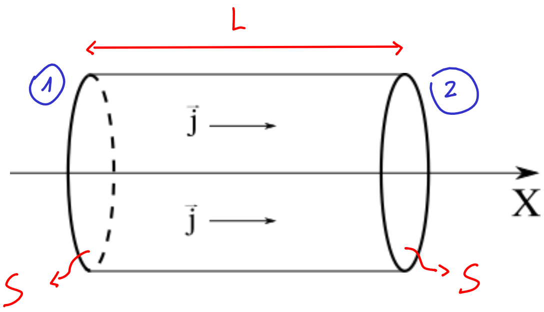
1.3.3 Résistance d'un conducteur filiforme

La résistance d'un conducteur ohmique, de section droite S et de longueur L, formé d'un matériau de conductivité γ (le courant se déplaçant parallèlement à la longueur) est :

$\boxed{R = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\tilde{\rho} L}{S}}$ **attention ! $\tilde{\rho}$ désigne ici la résistivité**

✎ Démontrer la relation précédente :

On choisit un modèle simple unidimensionnel pour la démonstration.



Toutes les grandeurs ne dépendent que de x et $\vec{j} = j(x)\,\vec{u_x}$.

• En régime stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc $\operatorname{div} \vec{j} = \frac{dj_x}{dx} = 0$

Ainsi $\vec{j} = j\,\vec{u_x}$ (ne dépend pas de x)

et $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = jS$

• D'autre part : $V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_1^2 \frac{\vec{j}}{\gamma} \vec{dl}$

$\vec{j} \parallel \vec{dl}$ donc $V_1 - V_2 = \frac{jL}{\gamma}$

• Finalement : $R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1 \to 2}} = \frac{jL/\gamma}{jS} = \frac{L}{\gamma S}$

On peut aussi écrire $\boxed{R = \rho \frac{L}{S}}$

Si la surface augmente la résistance diminue, c'est cohérent.