

OMPP 7

Dipôles

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

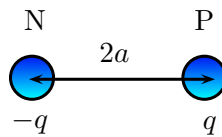
1	Le dipôle électrostatique	2
1.1	Le doublet de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$	2
1.2	Le dipôle électrostatique	2
1.3	Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique	2
1.4	Rencontre-t-on des dipôles électrostatiques dans la vraie vie?	5
1.5	L'opérateur $\vec{b} \cdot \vec{grad}$	6
1.6	Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle rigide	7
2	Le dipôle magnétique (ou magnétostatique)	11
2.1	Définitions	11
2.2	Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un dipôle magnétique	12
2.3	Action d'un champ magnétique EXTERIEUR sur un dipôle magnétique	14

1 Le dipôle électrostatique

La Nature est pleine de structures constituées de distributions de charges globalement neutres. Les atomes et les molécules constituent les exemples les plus simples. Si l'on s'interroge sur le champ électrostatique que créent de telles structures, naïvement on pourrait répondre qu'il est systématiquement nul. Il n'en est rien ! En particulier si le barycentre (几何中心) N des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre P des charges positives, cette distribution nommée distribution dipolaire crée un champ électrostatique que nous allons étudier.

1.1 Le doublet de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$

On appelle «doublet de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$ », un ensemble de deux charges $-q$ (une placée en N) et $+q$ (l'autre placée en P) distants de $2a$.



1.2 Le dipôle électrostatique

- On nomme «dipôle», un doublet dont la dimension $2a$ est petite devant d'autres longueurs intervenant dans l'étude. Par exemple, si l'on étudie le champ électrostatique créé par le doublet à une distance très grande devant $2a$, on parlera de champ électrostatique créé par le dipôle.

Le dipôle ne désigne rien d'autre que le doublet «vu à grande distance».

- Lorsque la distance $2a$ est constante, on parle de dipôle *rigide*. La suite de ce cours ne s'intéresse qu'au dipôle *rigide*.
- Une caractéristique quantitative du dipôle est son moment dipolaire défini par :

$$\boxed{\vec{p} \triangleq q\overrightarrow{NP}} \quad (\text{unité : C.m})$$

Les chimistes utilisent aussi l'unité suivante : le debye (D) $1\text{D} = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$

1.3 Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique

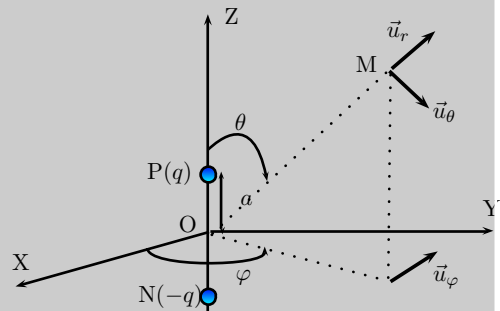
Le but de ce paragraphe est de calculer le champ électrostatique créé par le dipôle. La démarche consiste à calculer un potentiel électrostatique $V(M)$, puis à en déduire le champ électrostatique par la relation : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$.

1.3.1 Calcul de $V(M)$ dans l'approximation dipolaire

- Un potentiel électrostatique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} s'écrit avec le choix des coordonnées sphériques :

$$\boxed{V_{\text{dipole}}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

- Alors que le potentiel électrostatique créé par une charge varie en $\frac{1}{r}$, le potentiel électrostatique créé par le dipôle varie en $\frac{1}{r^2}$.



 Démontrer l'expression de V_{dipole} précédente.

$$V_{dipole} = V_N(r) + V_P(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Nr} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Pr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{Pr} - \frac{1}{Nr} \right)$$

$$r^2 = \|\vec{r}\|^2 = \|\vec{PO} + \vec{OR}\|^2 = \underbrace{\|\vec{PO}\|^2}_{a^2} + \underbrace{\vec{PO} \cdot \vec{OR}}_{-2ar\cos\theta} + \underbrace{\|\vec{OR}\|^2}_{r^2}$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{Pr} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta + 1}} \sim \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2} \right)$$

$$\text{De même } \frac{1}{Nr} \sim \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2} \right)$$

$$\text{On a alors } \frac{1}{Pr} - \frac{1}{Nr} = \frac{a}{r^2} \cos\theta \quad \text{puis } V(r) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De plus } p = qa \\ \text{et } \vec{p} \cdot \vec{r} = pr\cos\theta \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{V(r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$

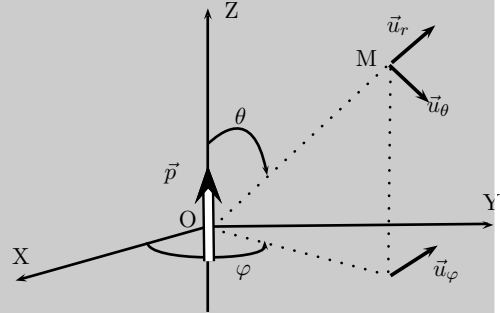
Ici $V(r) \propto \frac{1}{r^2}$ diminue plus vite que dans le cas d'une charge unique ($V \propto \frac{1}{r}$)

1.3.2 Calcul du champ électrostatique

- Le champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} s'écrit **avec le choix des coordonnées sphériques** :

$$\vec{E}_{dipole}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Le champ électrostatique créé par une charge varie en $\frac{1}{r^2}$ tandis que celui créé par le dipôle varie en $\frac{1}{r^3}$.



Démontrer l'expression de \vec{E}_{dipole}

$\vec{E} = - \text{grad } V$ donc en sphérique

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

1.3.3 Allure des lignes de champ

Quelques lignes de champ ont été représentées sur la figure 1.1 (ce sont les lignes orientées). Les lignes non orientées (couleur gris) sont des lignes équipotentielles. On constate :

- que les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan de symétrie xOz du dipôle ;
- que les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan d'antisymétrie xOy du dipôle. Elles coupent orthogonalement ce plan.

Il semble que les lignes de champ soient fermées (ce qui est en désaccord avec le caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique). En fait il n'en est rien ! Puisqu'on s'est intéressé au dipôle, on s'est engagé à se placer loin du doublet : il semble de loin que les lignes de champ soient fermées. Si on «zoom» au voisinage du doublet, on obtient les lignes de champ de la figure 1.2 qui ne sont pas fermées.

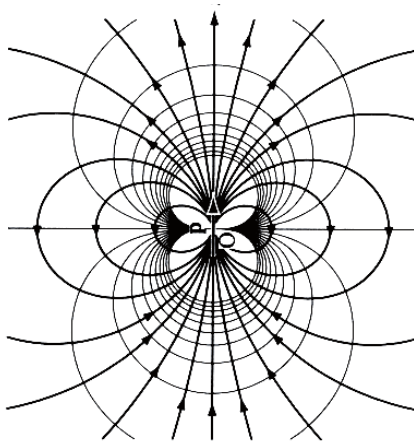


FIGURE 1.1 – Lignes de champ et équipotentielles du dipôle électrostatique

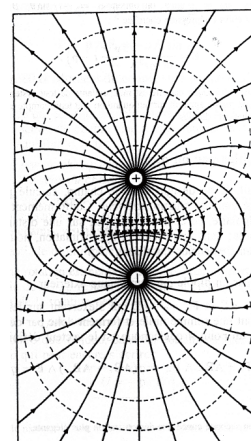


FIGURE 1.2 – Lignes de champ et équipotentielles du doublet

1.4 Rencontre-t-on des dipôles électrostatiques dans la vraie vie ?

Le début du cours peut paraître formel et déconnecté du réel. Il n'en est rien, on admettra :

Le dipôle modélise toute distribution de charges neutre mais dont le barycentre P des charges positives est différent du barycentre N des charges négatives. Les actions exercées et subies par ce dipôle sont entièrement caractérisées par la donnée du moment dipolaire $\vec{p} = q\overline{NP}$.

1.4.1 Les molécules polaires

- La notion de dipôle électrostatique est cruciale en chimie où de nombreuses molécules (neutres) possèdent un barycentre des charges positives distinct de celui des charges négatives : on parle de **molécules polaires**¹ (分子的极性).
- **Exemples de molécules polaires** : on a présenté le cas du fluorure d'hydrogène HF (figure 1.3 ; $p_{\text{HF}} = 1,82 D$) ainsi que celui très connu de l'eau H₂O (figure 1.4 ; $p_{\text{H}_2\text{O}} = 1,82 D$). Sur chacune des figures, les zones rouges (respectivement bleues) représentent les zones chargées négativement (respectivement positivement).
- **Exemples de molécules apolaires** : lorsque la molécule est «très symétrique», on ne saurait trouver de causes qui sépareraient le barycentre des charges positives de celui des charges négatives de sorte que la molécule présente un moment dipolaire nul. C'est le cas du trifluorure de bore BF₃ (figure 1.5) et du méthane CH₄ (figure 1.6).

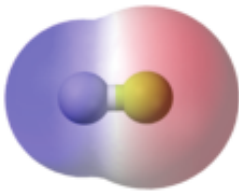


FIGURE 1.3 – HF polaire

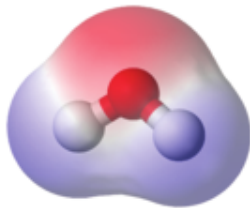


FIGURE 1.4 – H₂O polaire

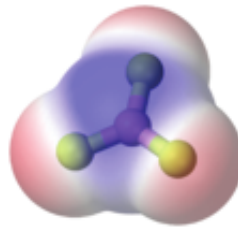


FIGURE 1.5 – BF₃ apolaire



FIGURE 1.6 – CH₄ apolaire

1.4.2 Les molécules polarisables

Les molécules polarisables sont des molécules dont le moment dipolaire permanent est nul mais qui acquièrent un moment dipolaire en présence d'un champ électrique extérieur.

L'origine physique de ce phénomène peut s'interpréter simplement : si l'on place dans un champ électrique extérieur une molécule dépourvue de moment dipolaire, les charges positives subissent des forces dans le sens du champ extérieur tandis que le nuage électronique se trouve déformé dans le sens opposé ; on dit que la molécule se polarise (voir figure 1.7). Le barycentre des charges positives ne coïncidant plus avec le barycentre des charges négatives, la molécule acquiert un moment dipolaire induit, en général colinéaire au champ et de même sens que celui-ci.

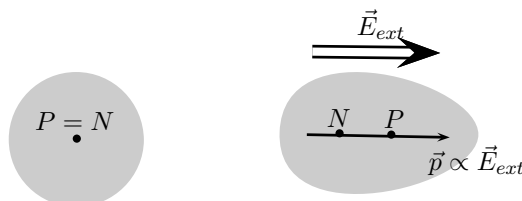


FIGURE 1.7 – À gauche : molécule en l'absence de champ électrique extérieur ; à droite : molécule en présence de champ extérieur

1. Au contraire, si la molécule est dépourvue de moment dipolaire, on parle de **molécule apolaire**.

1.5 L'opérateur $\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}$

Soit un champ de vecteurs $\{\vec{b}(M, t); M \in D; t \in I\}$. Le produit scalaire $(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad})$ est indépendant d'un choix de base. On peut écrire, suivant la base retenue, :

Coordonnées	$\vec{b}(M, t)$	\overrightarrow{grad}	$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad})$
cartésiennes	$b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z}$
cylindriques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial}{\partial z}$
sphériques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_\varphi \vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + b_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

1.5.1 ...appliqué à un champ de scalaires

Si, par ailleurs, on se donne un champ de scalaires $\{F(M, t); M \in D; t \in I\}$, on calcule aisément :

$$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) F = b_x \frac{\partial F}{\partial x} + b_y \frac{\partial F}{\partial y} + b_z \frac{\partial F}{\partial z} = \underbrace{(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z)}_{\vec{b}} \cdot \underbrace{\left(\vec{e}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial F}{\partial z} \right)}_{\overrightarrow{grad} F} = \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} F)$$

Le produit scalaire étant indépendant du choix de la base, on tire le résultat suivant

Soient le champ de vecteurs $\{\vec{b}(M, t); M \in D; t \in I\}$ et le champ de scalaires différentiable $\{F(M, t); M \in D; t \in I\}$:

$$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) F = \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} F)$$

1.5.2 ...appliqué à un champ de vecteurs

Si, par ailleurs, on se donne un champ de vecteurs $\{\vec{A}(M, t); M \in D; t \in I\}$, on a alors :

Coordonnées	$\vec{b}(M, t)$	\overrightarrow{grad}	$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A}$
cartésiennes	$b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$
cylindriques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_r \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$
sphériques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_\varphi \vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$b_r \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} + b_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi}$

■ Dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_x) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_y) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_z) \end{pmatrix}$$

■ Dans les autres systèmes de coordonnées, il faut tenir compte du fait que les vecteurs de bases \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ ne sont pas toujours de dérivée nulle par rapport aux variables d'espace. ^a

a. En particulier : $(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A} \neq \begin{pmatrix} \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_r) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_\theta) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_z) \end{pmatrix}$ par exemple.