OMPP

TD10 - Correction

Ex 1 : Vitesse moyenne des électrons dans le cuivre

1) Les porteurs de charge sont les électrons, comme chaque atome libère 1 électrons on a :

$$N_{cu} = n_{cu} N_A = \frac{m_{cu}}{M_{cu}} N_A = \frac{\rho_{cu} V}{M_{cu}} N_A = \frac{\rho_0 d_{cu} V}{M_{cu}} N_A$$

Ainsi $\boxed{n_p = \frac{N_{cu}}{V} = \frac{\rho_0 d_{cu}}{M_{cu}} N_A}$ AN : $n_p = 8{,}5 \cdot 10^{28} \ m^{-3}$

2) Par définition $\boxed{\vec{j} = n_p q \vec{v} = -e n_p \vec{v}}$

On a aussi $\boxed{\|\vec{j}\| = \frac{I}{S}}$ AN : $j = 1{,}0 \cdot 10^{6} \ A \cdot m^{-2}$

3) Ainsi $\frac{I}{S} = +e n_p v$ et $v = \frac{I M_{cu}}{S \rho_0 d_{cu} N_a e}$

AN : $v = \frac{1 \times 10^{3} \times 63{,}5 \times 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6} \times 1 \times 8{,}95 \times 6{,}02 \cdot 10^{23} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \ m \cdot s^{-1}$

Ex 2 : Temps d'établissement du régime stationnaire

1) Avant l'application du champ le conducteur est à l'équilibre

$\rightarrow \boxed{\rho(0^-) = 0}$

2) à $t = 0^+$, le conducteur n'est pas à l'équilibre

On ne peut donc pas appliquer la loi d'Ohm globale

3) D'après la loi de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad \text{or} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ donc :}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \gamma \operatorname{div} \vec{E} = \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ainsi $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon} \rho = 0$ puis $\boxed{\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0} t}}$

On pose $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$ le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire.

$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}} \quad \text{et} \quad \underline{\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{s}}$$

4) On a $\rho \simeq 0$ pour des champs de fréquence $f \ll \dfrac{1}{\tau}$

Soit $\boxed{f \ll 6{,}7 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}}$

c'est très souvent le cas.

Ex 3 : Resistance cylindrique

1) La densité volumique de courant est radiale. En intégrant sur un cylindre de rayon r on a :

$$\boxed{I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = 2\pi r h j}$$

2) On a une solution electolytique donc la loi d'Ohm locale s'aplique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ donc } \boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi r h \gamma} \vec{e_r}}$$

3) Par définition $R = \frac{U}{I} = \frac{|\Delta V|}{I}$

Or $\vec{E} = - \vec{\text{grad}}\, V = - \frac{dV}{dr} \vec{e_r}$ donc $dV = - E dr$

On intègre cette équation entre r_1 et r_2 et on obtient : $\Delta V = V(r_2) - V(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} - \frac{I}{2\pi h \gamma} \frac{dr}{r}$

$$\boxed{\Delta V = - \frac{I}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ et } \boxed{R = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

R diminue avec γ, cela semble logique

4) $R = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi h \gamma} \ln\left(\frac{e}{r_1} + 1\right)$

Pour $e \ll r_1$ on a $\ln\left(\frac{e}{r_1}+1\right) \sim \frac{e}{r_1}$ donc

$$\boxed{R \sim \frac{e}{2\pi h r_1 \gamma}}$$

Plus e est grand, plus il y a de solution à traverser plus la résistance est grande.