

OPTIQUE 8 :

Interféromètres et cohérence spatiale

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

1 Exemple d'interféromètre fonctionnant par division du front d'onde et éclairé par une source étendue : le dispositif des trous de YOUNG	2
1.1 Rappel du dispositif - non localisation des franges d'interférences	2
1.2 Influence du déplacement de la source ponctuelle	3
1.3 Cas de deux sources ponctuelles incohérentes	4
1.4 Cas d'une fente source	6
1.5 Élargissement de la fente source	7

Le chapitre précédent portait sur la possibilité d'interférences entre deux ondes issues d'une même source **ponctuelle**. Ce chapitre a pour but de s'intéresser à ces sources **non ponctuelles** que l'on nomme aussi **étendues** :

Quel est l'effet de la taille d'une source étendue sur la figure d'interférences ?

L'ensemble des réponses à cette question dépend **et** de la source, **et** de la nature du **diviseur d'ondes** et constitue ce que l'on nomme la **cohérence spatiale**.

1 Exemple d'interféromètre fonctionnant par division du front d'onde et éclairé par une source étendue : le dispositif des trous de YOUNG

Nous nous proposons, sur un exemple, d'étudier l'influence de la **taille finie** d'une source illuminant un diviseur d'ondes particulier : **le dispositif des trous de Young**.

1.1 Rappel du dispositif - non localisation des franges d'interférences

Le dispositif des trous "infiniment fins" de Young a été présenté au chapitre précédent. La figure 1 rappelle la géométrie du problème. En notant n l'indice de l'air pour la longueur d'onde considérée, a la distance entre les deux trous, D la distance entre l'écran opaque et l'écran d'observation et (z, x) les coordonnées d'un point M sur l'écran, on a montré (sous les conditions : $D \gg a$, $D \gg x$ et $D \gg z$) que la différence de marche valait :

$$\delta(M) \triangleq (SM)_2 - (SM)_1 = n(S_2M - S_1M) = n \frac{ax}{D}$$

Si l'on suppose les trous identiques alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ notés \mathcal{E}_0 par la suite. La formule des interférences à deux ondes s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \underbrace{\Gamma}_{=1} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n \frac{ax}{D} \right) \right]$$

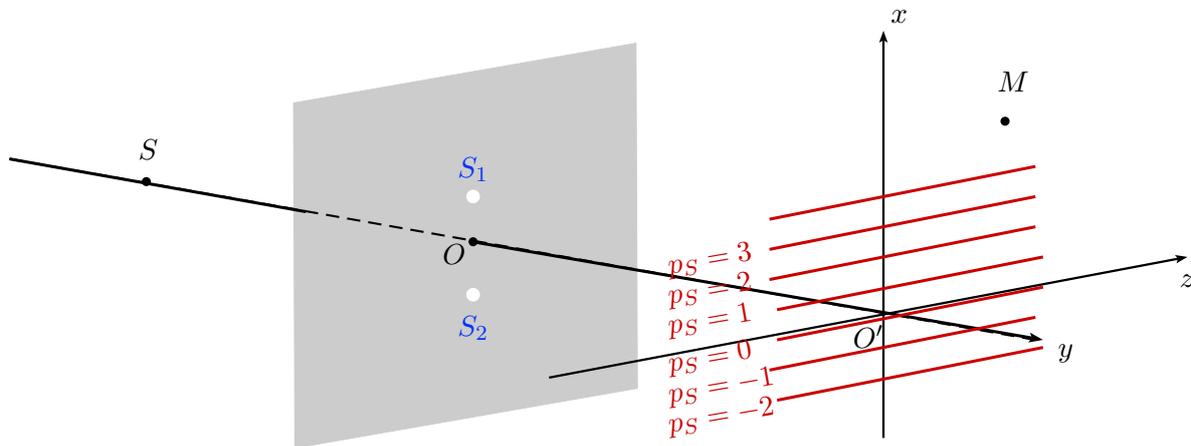


FIGURE 1 – Dispositif des trous de Young (trous «infiniment petits»)

Dans ces conditions, on observe sur l'écran une série de segments de droite équidistants parallèles à l'axe z et d'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda D}{a}$ où $\lambda \triangleq \frac{\lambda_0}{n}$.

Théorème - Localisation des franges d'interférences :

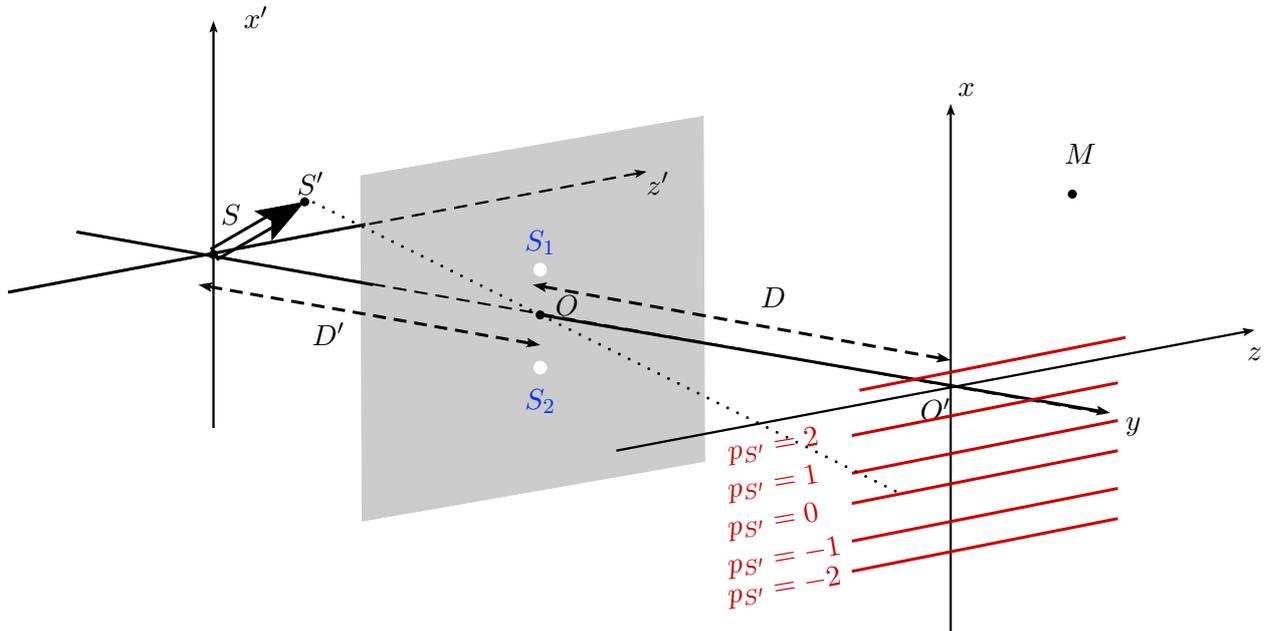
Les interférences produites par un dispositif interférentiel fonctionnant par division du front d'onde sont **non localisées** : elles sont observables en tout point de la zone de recouvrement des faisceaux passant par S_1 et S_2 nommée **champ interférentiel**.

1.2 Influence du déplacement de la source ponctuelle

Théorème - Déplacement de la source ponctuelle : Sous les hypothèses $x \ll D, z \ll D, a \ll D, x' \ll D', z' \ll D'$ et $a \ll D'$, la différence de marche en M lorsque la source ponctuelle est en S' (notée $\delta_{S'}(M)$) se déduit de la différence de marche en M lorsque la source ponctuelle est en S (notée $\delta_S(M)$) par la relation :

$$\delta_{S'}(M) = \underbrace{\delta_S(M)}_{=\frac{na x}{D}} + n \underbrace{\frac{\overrightarrow{S S'}}{D'}}_{=\frac{na x'}{D'}} \cdot \overrightarrow{S_2 S_1}$$

Les franges d'interférence sont donc translatées du vecteur $-x' \frac{D}{D'} \vec{e}_x$.



Démonstration. • **différence de marche :** La différence de marche en M avec une source en S' de coordonnées $(x', -D', z')$ par rapport à O s'écrit :

$$\delta_{S'}(M) = (S'M)_2 - (S'M)_1 = (S'S_2) + (S_2M) - (S'S_1) - (S_1M) = \underbrace{(S_2M) - (S_1M)}_{=\delta_S(M)} + \underbrace{(S'S_2) - (S'S_1)}_{=(S_2S') - (S_1S')}$$

On suppose que $D' \gg a, D' \gg x'$ et $D' \gg z'$: on est dans les conditions d'utilisation du lemme géométrique du chapitre précédent :

$$(S_2S') - (S_1S') = \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \vec{u}(S') \quad \text{avec} \quad \vec{u}(S') = \frac{\overrightarrow{O S'}}{O S'} \approx \frac{\overrightarrow{O S'}}{D'}$$

Ainsi on obtient : $(S_2S') - (S_1S') = n \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \frac{\overrightarrow{O S'}}{D'}$ mais $\overrightarrow{O S'} = \overrightarrow{O S} + \overrightarrow{S S'}$ où $\overrightarrow{O S}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{S_2 S_1}$, donc :

$$(S_2S') - (S_1S') = n \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{S S'}}{D'}$$

Finalement :

$$\delta_{S'}(M) = \delta_S(M) + n \frac{\overrightarrow{S S'}}{D'} \cdot \overrightarrow{S_2 S_1}$$

On a déjà vu que : $\delta_S(M) = n \frac{ax}{D}$ et de même :

$$n \frac{\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{S S'}}{D'} = \frac{n}{D'} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} = n \frac{ax'}{D'}$$

Finalement :

$$\delta_{S'}(M) = n \frac{ax}{D} + n \frac{ax'}{D'}$$

• **éclairage** : Si la source est en S, alors l'éclairage en M est :

$$\mathcal{E}_S(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nax}{D} \right) \right]$$

Si la source est en S', alors l'éclairage en M est :

$$\mathcal{E}_{S'}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{nax}{D} + \frac{nax'}{D'} \right) \right) \right]$$

autrement dit :

$$\mathcal{E}_{S'}(x) = \mathcal{E}_S \left(x + \frac{x'D}{D'} \right)$$

L'éclairage créé par S' se déduit de celui créé par S par une translation de vecteur $-\frac{x'D}{D'} \vec{e}_x$

□

1.3 Cas de deux sources ponctuelles incohérentes

1.3.1 Aspect qualitatif

Désormais, les deux trous S_1 et S_2 sont illuminés par deux sources ponctuelles (de même longueur d'onde mais incohérentes) S et S' situées dans un plan orthogonal à l'axe y. Comment placer S' par rapport à S :

- ① pour que la figure d'interférences soit inchangée (et plus lumineuse) ?
- ② pour que le phénomène d'interférences disparaisse (on dit qu'il y a **brouillage** de la figure d'interférences) ? On pourra compléter la figure 2.

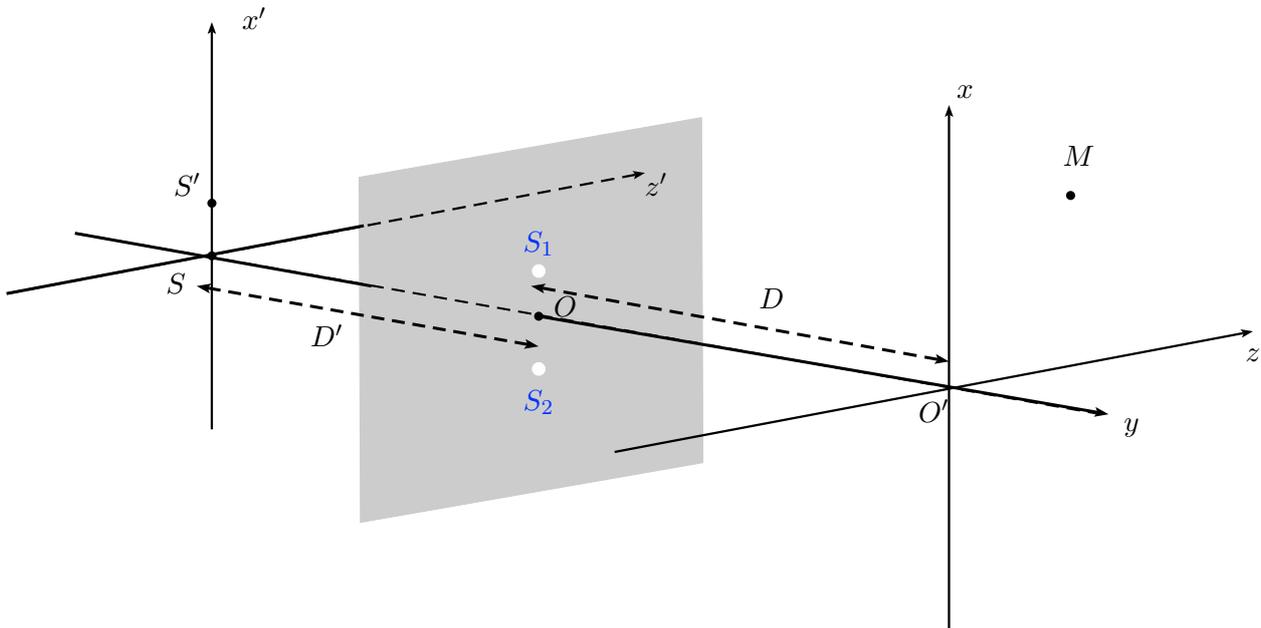


FIGURE 2 – Brouillage de la figure d'interférences

Les sources S et S' sont incohérentes donc les éclaircements qu'elles vont produire vont s'additionner : $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_S(x) + \mathcal{E}_{S'}(x)$

① **figure d'interférences inchangée et plus lumineuse :**

il faut qu'une frange claire de S se superpose à une frange claire créée par S', c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\delta_{S'}(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_S(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z}$$

ce qui implique compte-tenu de la partie 1.2 que :

$$\begin{aligned} \frac{n\overrightarrow{SS'}}{\lambda_0 D'} \cdot \overrightarrow{S_2 S_1} \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \frac{ax'}{D'\lambda} \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x' = p \frac{D'\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

② **brouillage**

il va y avoir brouillage lorsqu'une frange sombre créée par S se superpose à une frange claire créée par S' et réciproquement : l'éclaircissement va devenir uniforme et le phénomène d'interférence disparaît, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\delta_{S'}(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_S(M)}{\lambda_0} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

par exemple, ou l'inverse ce qui implique que, compte tenu de la partie 1.2 que :

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{SS'}}{\lambda D'} \cdot \overrightarrow{S_2 S_1} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \frac{ax'}{D'\lambda} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad x' = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{D'\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.3.2 Aspect quantitatif : contraste

Théorème - Contraste avec deux sources ponctuelles incohérentes : De manière générale avec deux sources ponctuelles S et S' incohérentes, le contraste du phénomène est :

$$\Gamma(M) = |\cos [\pi (p_{S'}(M) - p_S(M))]|$$

Sur un écran (figure 3), on observe les franges d'interférences pour la source S seule, puis pour S' seule : on remarque bien que la figure d'interférence est décalée. Avec S et S' simultanément, on observe une superposition des figures d'interférences et un contraste différent.

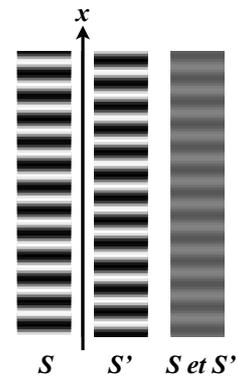


FIGURE 3 – Franges d'interférences produites par S seule, S' seule puis S et S' simultanément

Démonstration. Rappelons que les éclairagements produits par S et S' s'additionnent car S et S' sont incohérentes :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M) &= \underbrace{2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p_S(M))]}_{\mathcal{E}_S(M)} + \underbrace{2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p_{S'}(M))]}_{\mathcal{E}_{S'}(M)} \\ &= 2\mathcal{E}_0 [2 + \cos(2\pi p_S(M)) + \cos(2\pi p_{S'}(M))]\end{aligned}$$

comme $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on obtient :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 [1 + \cos(\pi(p_{S'}(M) - p_S(M))) + \cos(\pi(p_{S'}(M) + p_S(M)))]$$

ici :

$$\begin{cases} p_{S'}(M) + p_S(M) = \frac{na}{\lambda_0 D'}(2x + x') & \text{dépend de } x \\ p_{S'}(M) - p_S(M) = \frac{na}{\lambda_0 D'}x' & \text{ne dépend pas de } x \end{cases}$$

donc $\mathcal{E}(M)$ est maximal quand : $\cos(\pi(p_{S'}(M) + p_S(M))) = 1$ si $\cos(\pi(p_{S'}(M) - p_S(M))) > 0$ et minimal dans le cas contraire :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0 [1 + |\cos(\pi(p_{S'}(M) - p_S(M)))|] \\ \mathcal{E}_{min} = 4\mathcal{E}_0 [1 - |\cos(\pi(p_{S'}(M) - p_S(M)))|] \end{cases}$$

Ainsi, le contraste Γ s'écrit :

$$\Gamma = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = \frac{|\cos(\pi(p_{S'}(M) - p_S(M)))|}{\left| \cos\left(\pi \frac{na x'}{\lambda_0 D'}\right) \right|}$$

On retrouve les résultats qualitatifs pour le brouillage. □

1.4 Cas d'une fente source

Théorème - Contraste avec une fente source : On peut remplacer la source ponctuelle S par une fente source allongée dans une direction **orthogonale à l'axe des deux trous**, sans modifier le contraste de la figure d'interférences

En effet, la fente source est constitué d'une infinité de sources ponctuelles S' incohérentes entre elles : les éclairément qu'elles produisent vont s'ajouter sur l'écran d'observation. Ces éclairément sont identiques puisque

$\forall S' \in F, \delta_{S'}(M) = \delta_S(M) + \underbrace{n \frac{\overrightarrow{SS'}}{D'} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}}_{=0}$. On observera la même figure d'interférences que celle produite

par une source ponctuelle S mais plus lumineuse.

1.5 Élargissement de la fente source

1.5.1 Observation expérimentale

Considérons le dispositif des trous de Young illuminé par une fente source (parallèle à l'axe z') de largeur $2b$ selon x' que l'on peut faire varier (cf. figures 4 et 5).

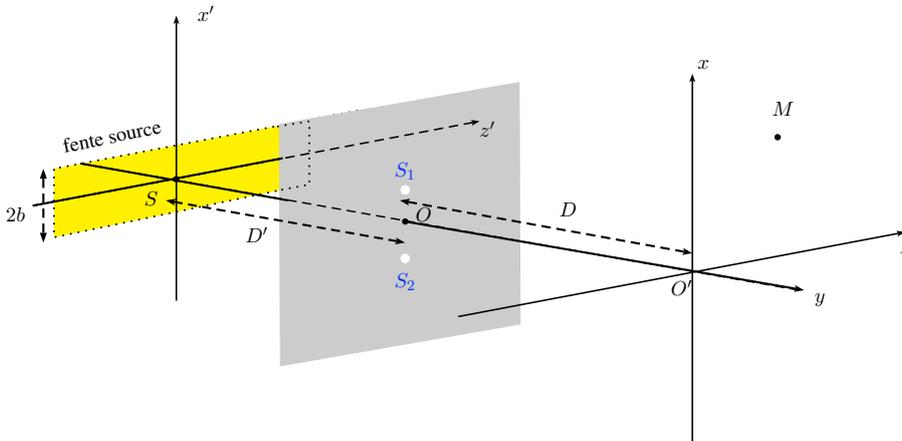


FIGURE 4 – Élargissement de la fente source

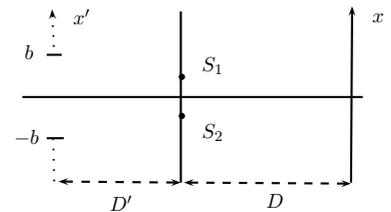


FIGURE 5 – Élargissement de la fente source

Partons d'une situation où la fente source est "infiniment mince" : on observe une figure d'interférences peu lumineuse mais bien contrastée. Lorsqu'on élargit la fente source (c'est-à-dire que l'on augmente $2b$), la luminosité augmente mais le contraste chute jusqu'à un brouillage complet des interférences.

Si l'on continue d'ouvrir la fente, les interférences réapparaissent, lumineuses, mal contrastées; on remarque par ailleurs qu'il y a une **"inversion du contraste"** c'est-à-dire que là où se trouvaient des franges claires lorsque la fente source était infiniment fine, on observe désormais des franges sombres et réciproquement.

La figure 6 représente l'évolution de la figure d'interférences en fonction de la largeur $2b$ de la fente source.

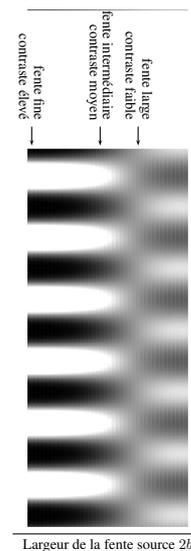


FIGURE 6 – Évolution de la figure d'interférences en fonction de la largeur de la fente source

1.5.2 Calcul de l'éclairement : conclusion

Théorème - Éclairement et contraste lors de l'élargissement d'une fente source :

Dans le cas du dispositif des trous de Young, la figure d'interférences est plus lumineuse mais moins contrastée à mesure que l'on élargit la fente source (la fente étant parallèle aux franges d'interférences). Lorsque la fente source est trop large, il y a disparition des franges ("brouillage") conformément au paragraphe ???. Il en est de même pour tous les dispositifs à division du front d'onde.

Démonstration. Raisonnons sur la fente source de largeur $2b$ fixée (cf. figure 5). La portion de fente source située entre x' et $x' + dx'$ possède un éclairement $d\mathcal{E}_0$ proportionnel à dx' : $d\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{2b} dx'$. □

• Apparté sur la fonction sinus cardinal :

La fonction **sinus cardinal** est définie comme suit : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$. On la prolonge par continuité en 0 en imposant $\text{sinc}(0) = 1$. Cette fonction est paire. Elle s'annule pour $x = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

La fonction dérivée s'écrit $(\text{sinc } x)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. La fonction **sinus cardinal** admet donc des extrema pour les valeurs de x telles que : $\tan x = x$. La résolution numérique de cette équation conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{array}{cccccc} x = & 0 & 1,43\pi & 2,45\pi & 3,47\pi & 4,48\pi & 5,48\pi \\ \text{sinc}(x) = & 1 & -0,217 & 0,128 & -9,13 \cdot 10^{-2} & 7,09 \cdot 10^{-2} & -5,80 \cdot 10^{-2} \end{array}$$

De façon approchée, les extrema se trouvent à des abscisses proches des valeurs $x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. L'approximation est d'autant plus précise que m est élevé.

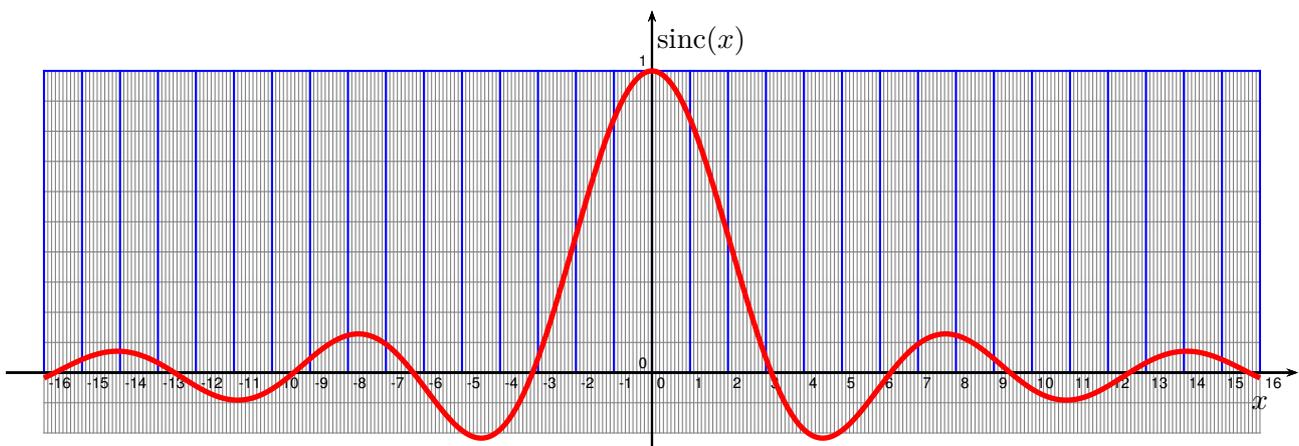


FIGURE 7 – Allure de la fonction $x \rightarrow \text{sinc}(x)$

• Évolution du contraste en fonction de la largeur de la source :

À partir de la forme du sinus cardinal, on peut déduire l'évolution du contraste en fonction de la largeur de la fente (figure 8).

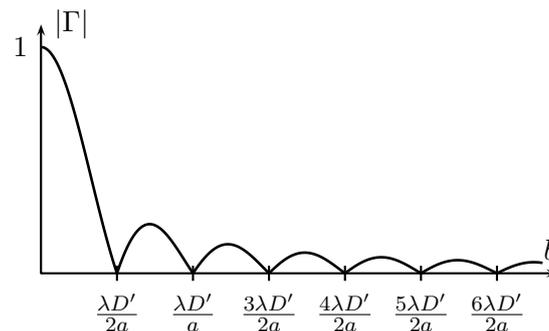


FIGURE 8 – Contraste en fonction de la demi-largeur b de la fente source

Les figures 7 et 8 permettent de rendre compte des résultats expérimentaux :

- pour $b \ll \frac{\lambda D'}{2a}$: bon contraste ($\Gamma \approx 1$)
- pour $b \approx \frac{\lambda D'}{2a}$: mauvais contraste ($\Gamma \approx 0$), on a brouillage
- pour $\frac{\lambda D'}{2a} < b < \frac{\lambda D'}{a}$: $\text{sinc}\left(\frac{2\pi ab}{\lambda D'}\right) < 0$, ainsi quand $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D'}\right) = 1$ on obtient désormais une frange sombre car $\mathcal{E}(x)$ est minimal : on dit qu'il y a "inversion de contraste" car les franges claires sont devenues des franges sombre (et réciproquement) quand le sinus cardinal change de signe