

OPTIQUE 9 : Cohérence temporelle

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Onde quasi-monochromatique | 2 |
| 1.1 | Modèle de source quasi-monochromatique : source présentant un profil rectangulaire en nombre d'ondes | 2 |
| 1.2 | (Le) Cas d'une source bichromatique (relève-t-il de la cohérence temporelle ?) | 5 |
| 1.3 | Synthèse : critère semi-quantitatif de cohérence temporelle | 7 |

Nous avons étudié dans les chapitres précédents le phénomène d'interférence dans le cas d'une source monochromatique ponctuelle, puis étendue : la taille spatiale de la source peut avoir une influence sur la figure d'interférence observée. Intéressons-nous à présent à des sources non-monochromatique et posons-nous à présent la question :

Quel est l'effet de la taille spectrale d'une source non-monochromatique sur la figure d'interférences?

Cette étude est commune aux interféromètres fonctionnant par division du front d'onde et par division d'amplitude et nous permettra d'introduire la notion de **cohérence temporelle**.

1 Onde quasi-monochromatique

1.1 Modèle de source quasi-monochromatique : source présentant un profil rectangulaire en nombre d'ondes

1.1.1 Densité spectrale en nombre d'ondes (rappel)

Une source n'est **jamais parfaitement monochromatique** avec $s(t) = A \cos(2\pi ft)$. En revanche, toute onde lumineuse réelle peut être décomposée en somme continue (portant sur la fréquence f par exemple) de signaux monochromatiques :

$$s(t) = \int_{f=0}^{f=+\infty} a(f) \cos(2\pi ft + \varphi(f)) df$$

L'éclairement de cette source est alors la somme des éclairements dus aux différentes composantes monochromatiques.

On choisit (pour des commodités liées aux calculs) de travailler avec le nombre d'ondes défini par $\sigma = \frac{1}{\lambda_0}$ où λ_0 désigne la longueur d'onde dans le vide.

Rappel : La **densité spectrale d'éclairement en nombre d'ondes** notée $e_\sigma(\sigma)$ est définie par la relation :

$$d\mathcal{E}(\sigma) \triangleq e_\sigma(\sigma) d\sigma$$

où $d\mathcal{E}(\sigma)$ représente la contribution des composantes monochromatiques dont le nombre d'ondes se trouve dans l'intervalle $[\sigma; \sigma + d\sigma]$ à l'éclairement.

L'éclairement de la source est alors :

$$\mathcal{E}_0 = \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} e_\sigma(\sigma) d\sigma$$

1.1.2 Source quasi-monochromatique : profil rectangulaire en nombre d'ondes

On modélise une source quasi-monochromatique par la donnée de sa densité spectrale d'éclairement. On adopte le modèle simpliste d'un profil rectangulaire représenté sur la figure 1 :

$$e_\sigma(\sigma) = \begin{cases} e_0 & \text{si } \sigma \in \left[\sigma_m - \frac{\Delta\sigma}{2}; \sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \\ 0 & \text{si } \sigma \notin \left[\sigma_m - \frac{\Delta\sigma}{2}; \sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \end{cases}$$

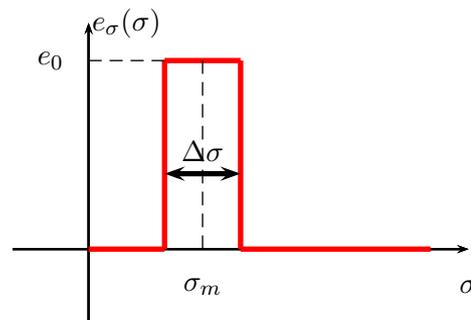


FIGURE 1 – Densité spectrale d'éclairement en nombre d'ondes

où $\Delta\sigma \ll \sigma_m$ afin que l'on puisse parler de source *quasi* monochromatique.

1.1.3 Conséquence sur l'éclairement

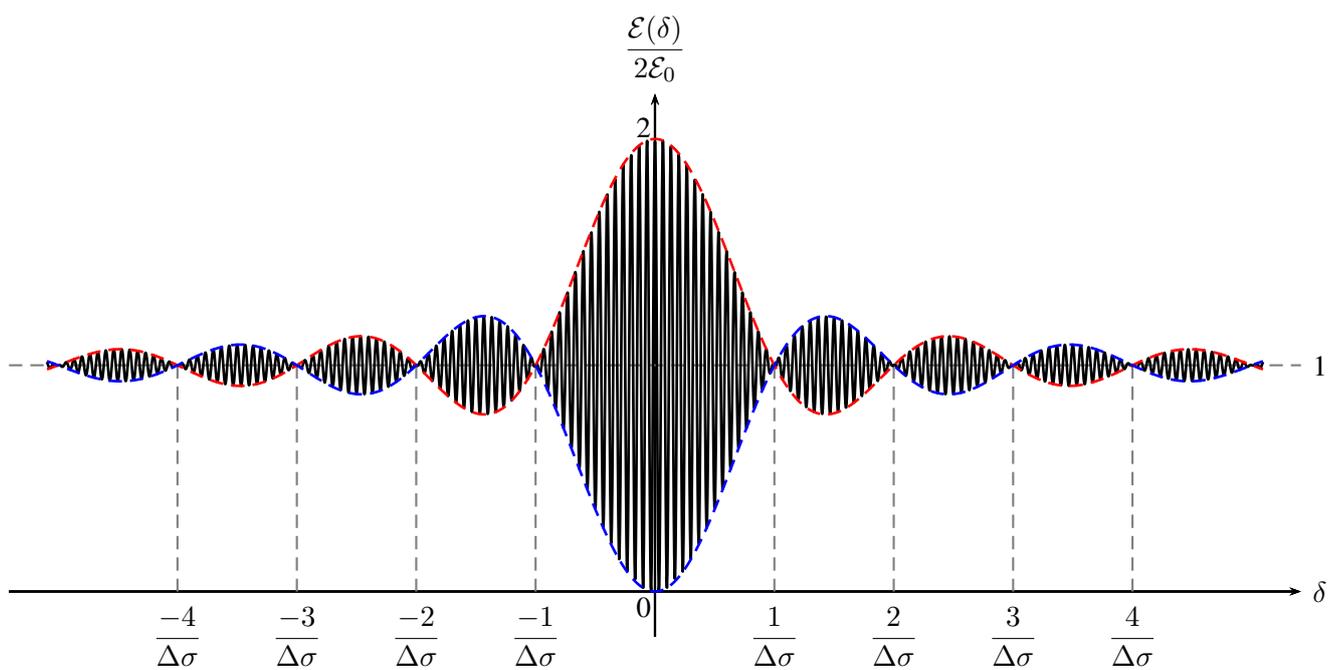


FIGURE 2 – Allure de $\frac{\mathcal{E}(\delta)}{2\mathcal{E}_0}$

En pointillé rouge, on a représenté la courbe $x \rightarrow 1 + \text{sinc}(x)$ et en pointillé bleu, la courbe $x \rightarrow 1 - \text{sinc}(x)$.

L'éclairement est composée de deux fonctions :

- $\delta \rightarrow \cos(2\pi\sigma_m\delta)$ qui est $\frac{1}{\sigma_m}$ périodique
- $\delta \rightarrow \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)$ qui s'annule tous les $\frac{1}{\Delta\sigma}$

avec $\sigma_m \gg \Delta\sigma$ ce qui est visible sur la figure 2 : $\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)$ varie nettement moins vite que $\cos(2\pi\sigma_m\delta)$. On peut ainsi considérer que *localement* $\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)$ est "constant" par rapport à $\cos(2\pi\sigma_m\delta)$. On définit alors un **contraste local** notée $\Gamma_{local}(\delta)$:

$$\Gamma_{local}(\delta) = \frac{\mathcal{E}_{max\ local}(\delta) - \mathcal{E}_{min\ local}(\delta)}{\mathcal{E}_{max\ local}(\delta) + \mathcal{E}_{min\ local}(\delta)}$$

avec :

- $\mathcal{E}_{max\ local}$ obtenu si $\begin{cases} \cos(2\pi\sigma_m\delta) = 1 & \text{si } \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) > 0 \\ \cos(2\pi\sigma_m\delta) = -1 & \text{si } \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) < 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{E}_{max\ local}(\delta) = 2\mathcal{E}_0 [1 + |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)|]$
- $\mathcal{E}_{min\ local}$ obtenu si $\begin{cases} \cos(2\pi\sigma_m\delta) = -1 & \text{si } \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) > 0 \\ \cos(2\pi\sigma_m\delta) = 1 & \text{si } \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) < 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{E}_{min\ local}(\delta) = 2\mathcal{E}_0 [1 - |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)|]$

Ainsi on obtient un contraste local

$$\Gamma_{local}(\delta) = |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)|$$

Le contraste local chute fortement dès le premier brouillage quand $\delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$: les interférences ne sont visibles que pour $|\delta| < \frac{1}{\Delta\sigma}$ et disparaissent pour $|\delta| > \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = l_c$. **On retrouve bien ici une condition due à la cohérence temporelle avec ce modèle.**

Remarque : dans ce modèle, après le premier brouillage, le contraste local augmente de nouveau ! Cela est dû au modèle simpliste adopté pour $e_\sigma(\sigma)$. Ce n'est pas le cas avec un modèle plus réaliste.

1.1.4 Conséquence sur la figure d'interférences

• Cas où les franges d'interférences sont circulaires et la cohérence spatiale totale ¹

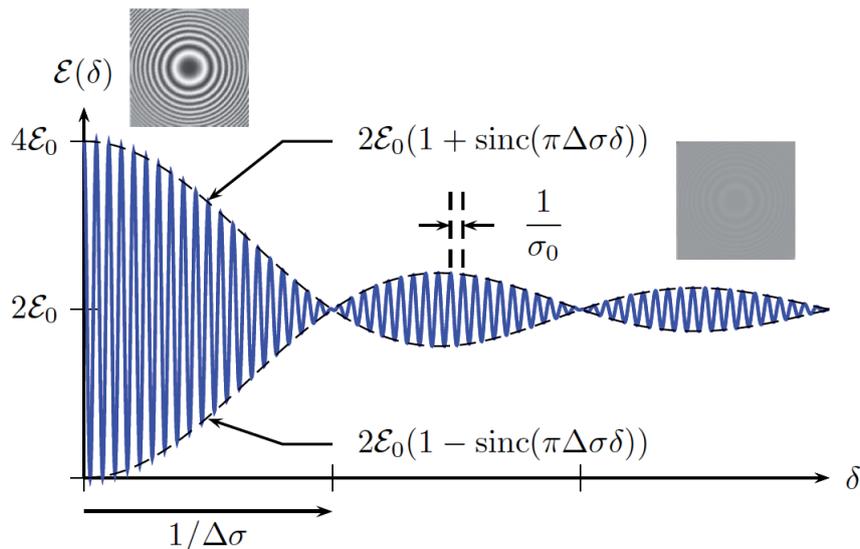


FIGURE 3 – Allure de la figure d'interférences en fonction de δ

1. C'est le cas de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air éclairé par une source ponctuelle ou bien de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air éclairé par une source étendue, les interférences étant observées à l'infini.

- Cas où les franges d'interférences sont des branches d'hyperbole assimilées à des franges rectilignes et la cohérence spatiale totale.²

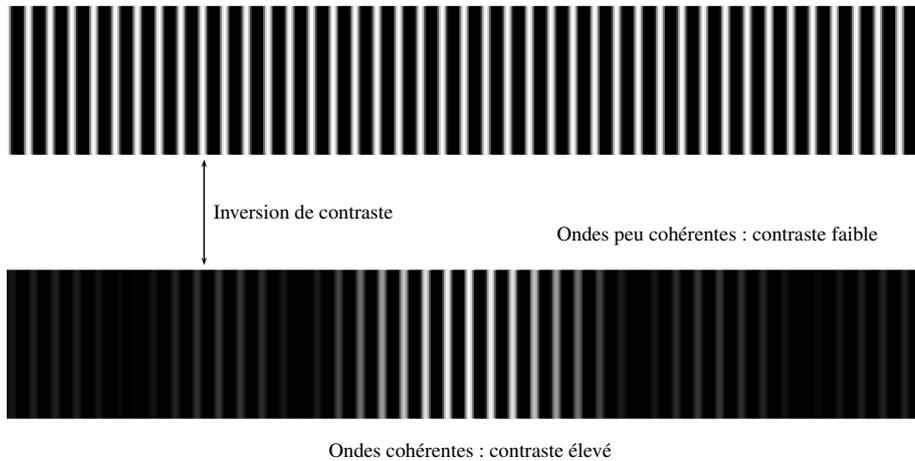


FIGURE 4 – Perte locale de contraste due à la perte de cohérence temporelle

1.1.5 Lien avec la cohérence temporelle

Théorème - Cohérence temporelle : Dans le cadre du modèle de source présentant un profil spectral rectangulaire, la visibilité de la figure d'interférences évolue d'une frange à l'autre. On retrouve par le calcul que pour les points M du champ interférentiel tels que :

$$|\delta(M)| \gtrsim \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = \ell_c$$

les franges disparaissent : il y a **perte de cohérence temporelle**.

1.2 (Le) Cas d'une source bichromatique (relève-t-il de la cohérence temporelle ?)

1.2.1 Calcul de l'éclairement

On envisage le cas d'une lampe à sodium et on supposera que le spectre de la source est constitué de deux radiations monochromatiques (deux raies "infiniment fines") de longueur d'onde dans le vide respective : $\lambda_1 = \frac{1}{\sigma_1} = 589,6 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{\sigma_2} = 589,0 \text{ nm}$ et de même éclairement \mathcal{E}_0 .

Cas d'un doublet : Dans le cas d'un doublet de raies monochromatiques de longueur d'onde moyenne λ_m et distantes de $\Delta\lambda$:

— la figure d'interférences $\delta \rightarrow \mathcal{E}(\delta)$ présente périodiquement des brouillages ;

— le nombre de franges visibles entre deux brouillages est de l'ordre de $N = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$.

Ordre de grandeur : Pour le doublet jaune-orangé du sodium, on obtient $N = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} \approx \frac{589,3}{0,6} = 9,8 \times 10^2$.

2. C'est le cas des trous de Young éclairés par une fente fine parallèle aux franges ou de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air illuminé par une source ponctuelle ou de l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air illuminé par une source étendue, les franges étant observées au voisinage du coin d'air.

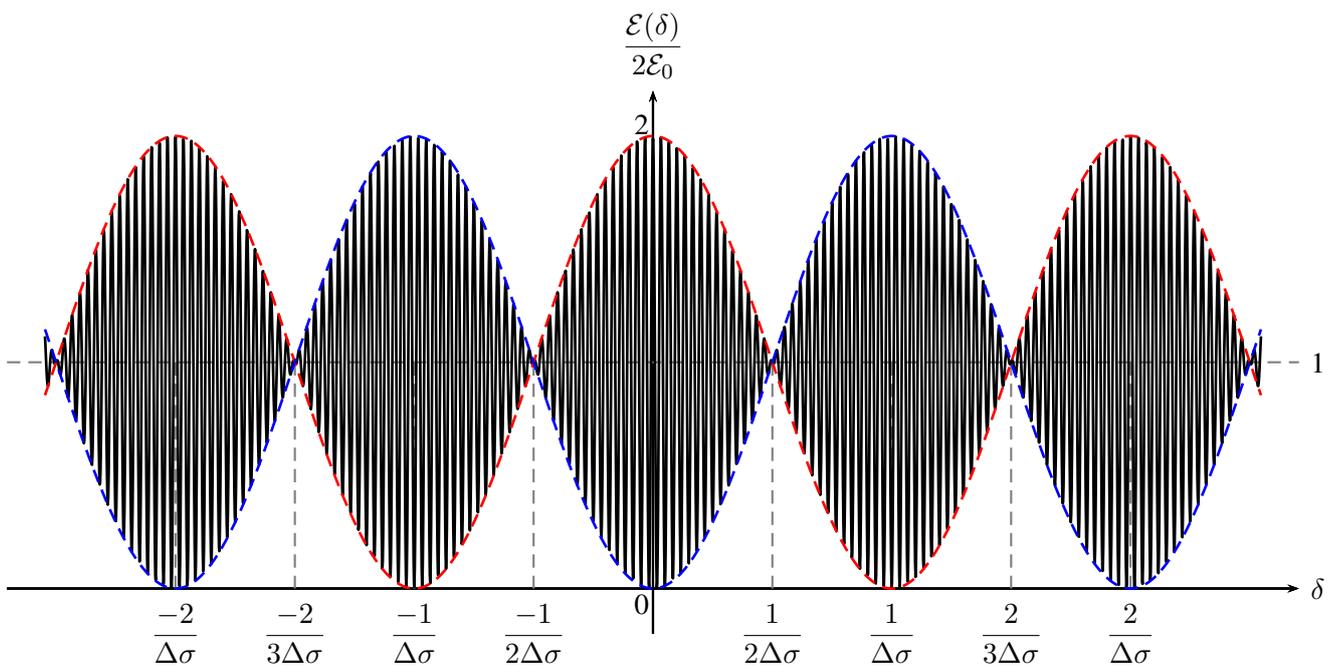


FIGURE 5 – Allure de $\frac{\mathcal{E}(\delta)}{2\mathcal{E}_0}$

En pointillé rouge, on a représenté la courbe $x \rightarrow 1 + \cos(x)$ et en pointillé bleu, la courbe $x \rightarrow 1 - \cos(x)$.

L'éclairement est composée de deux fonctions :

- $\delta \rightarrow \cos(2\pi\sigma_m\delta)$ qui est $\frac{1}{\sigma_m}$ périodique
- $\delta \rightarrow \cos(\pi\Delta\sigma\delta)$ qui est $\frac{2}{\Delta\sigma}$ périodique

avec $\sigma_m \gg \Delta\sigma$ ce qui est visible sur la figure 5 : $\cos(\pi\Delta\sigma\delta)$ varie nettement moins vite que $\cos(2\pi\sigma_m\delta)$.

Ce modèle de deux radiations monochromatiques rend compte :

- de zones de faible contraste : on parle de "brouillage" ou "anticoïncidences" pour le doublet du sodium
- de longueur de cohérence $l_c = +\infty$ car on considère les ondes monochromatiques avec $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = 0$.

On peut définir le **contraste local** comme précédemment qui mène alors à :

$$\Gamma_{local}(\delta) = |\cos(\pi\Delta\sigma\delta)|$$

Entre deux brouillage successifs, le nombre de franges N est :

$$N = \frac{1/\Delta\sigma}{1/\sigma_m} = \frac{\lambda_m^2/\Delta\lambda}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$$

La mesure de N permet ainsi d'avoir accès à $\Delta\lambda$ si on connaît λ_m .

Remarque : On parle "d'anticoïncidences" pour le doublet du sodium car on peut interpréter le brouillage ainsi : les franges sombres du système interférentiel créé par λ_1 sont occupées par les franges claires du système interférentiel créé par λ_2 . On a la même couleur partout, il y a brouillage.

1.2.2 Conséquence sur la figure d'interférences (dans le cas d'une cohérence spatiale totale)

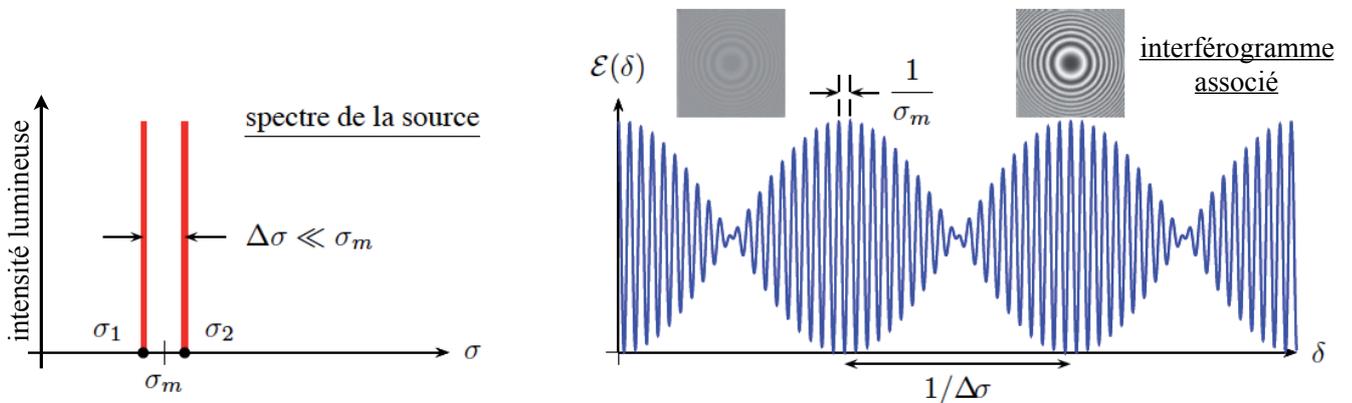


FIGURE 6 – Courbe $\delta \rightarrow \mathcal{E}(\delta)$: conséquences sur la figure d'interférences

1.3 Synthèse : critère semi-quantitatif de cohérence temporelle

L'étude des exemples précédents permet de dégager un critère de **cohérence temporelle** c'est-à-dire un critère concernant l'étendue spectrale de la source afin qu'il n'y ait pas brouillage des interférences.

Critère de cohérence temporelle : Soit λ_m la valeur moyenne de la longueur d'onde (dans le vide) émise par une source quasi-monochromatique. Il n'y a pas brouillage de la figure d'interférences en un point M du champ d'interférences lorsque :

$$\forall \lambda \in \text{spectre de la source} \quad |p_\lambda(M) - p_{\lambda_m}(M)| < \frac{1}{2}$$

La notion de cohérence temporelle est donc une notion **relative** au système {source - diviseur d'ondes}.