# Thermodynamique 7 : Premier principe pour un fluide en écoulement

École Centrale Pékin

2019-2020

Année 3

## Table des matières


1 **Bilan de masse** 2
  1.1 Débit de masse et de volume . . . . . . . . . . 2
  1.2 Équation de conservation de la masse . . . . . . . . . . 2

2 **Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert** 3
  2.1 Hypothèses de travail . . . . . . . . . . 3
  2.2 Expression du premier principe . . . . . . . . . . 3
  2.3 Applications . . . . . . . . . . 5

3 **Théorème de Bernoulli (hors programme)** 6

4 **Étude d'une machine frigorifique** 8

# 1 Bilan de masse

## 1.1 Débit de masse et de volume

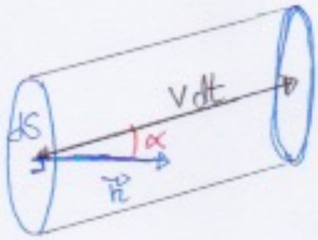
La quantité $D(t)$ représente **le débit volumique**, c'est-à-dire le volume qui traverse la surface $\vec{S}(M)$ par unité de temps, compté positivement dans le sens de $\vec{S}$ est :

$$\boxed{D(t) = \iint_{M \in S} \vec{v}(M,t) \cdot d\vec{S}(M,t)}$$

Le débit volumique s'exprime en $m^3.s^{-1}$.

Volume qui traverse $dS$ pendant $dt$ = $v dt dS . \cos(\alpha)$

$= \vec{V}.\vec{dS} .dt$




Débit = $\dfrac{\text{Volume traversé pendant } dt}{dt}$

Débit élementaire = $\vec{V}.\vec{dS}$

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$

La quantité $D_m(t)$ représente **le débit massique**, c'est-à-dire la quantité de masse qui traverse la surface $\vec{S}(M)$ par unité de temps, compté positivement dans le sens de $\vec{S}$ est :

$$\boxed{D_m(t) = \iint_{M \in S} \mu \vec{v}(M,t) \cdot d\vec{S}(M,t)}$$

Le débit massique s'exprime en $kg.s^{-1}$

## 1.2 Équation de conservation de la masse

L'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t) + \text{div}\,(\mu \vec{v}(M,t)) = 0}$$

Démo en 1D : Prenons un élément entre $x$ et $x+dx$

$x$ — $x+dx$ → $x$

- Variation de masse totale pendant $dt$ : $\left[\mu(x,t+dt) - \mu(x,t)\right] dx$

$= \dfrac{\partial \mu}{\partial t}(x,t)\, dx\, dt$

- Masse qui rentre pendant $dt$ = $\mu(x).v(x).dt$
- Masse qui sort pendant $dt$ = $\mu(x+dx) v(x+dx) dt$

⇒ Bilan total : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) dx dt = \left[\mu(x) v(x) - \mu(x+dx) v(x+dx)\right] dt = -\dfrac{\partial \mu v}{\partial x} dx\, dt$

Attention, cette équation est valable seulement si il n'y a pas de sources de masse dans la région considérée.

d'où $\boxed{\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \dfrac{\partial \mu v}{\partial x} = 0}$

En régime permanent, le débit massique se conserve. Si de plus $\mu(M,t)$ est une constante, alors on retrouve la caractérisation d'un fluide incompressible

- En régime Permanent $\mu(x,t) = \mu(x)$ donc $\operatorname{div}(\mu v) = 0$

- Régime Permanent + Homogène (Fluide) $\Rightarrow \operatorname{div}(\mu v) = \mu \operatorname{div}(v) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

> En régime permanent, le débit massique est à flux conservatif : $\operatorname{div}(\mu\vec{v}) = 0$
> Si de plus la masse volumique est constante, alors $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

## 2 Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert

Le but de cette partie est d'établir l'expression de la variation total d'énergie d'un **système ouvert** entre deux instants.

Nous allons donner une version du premier principe dans le cas d'un fluide en écoulement dans une machine industrielle quelconque (pas forcément une machine thermique). On peut l'utiliser soit pour connaître l'état du fluide en sortie d'une machine industrielle (cas des machines thermiques), soit connaître le travail ou la chaleur échangée par le fluide qui passe à travers un système industriel (éolienne, barrage, etc).

### 2.1 Hypothèses de travail

Le premier principe en système ouvert pourra s'appliquer à de nombreux exemples en pratique. Nous devons quand même faire quelques hypothèses simplificatrices :

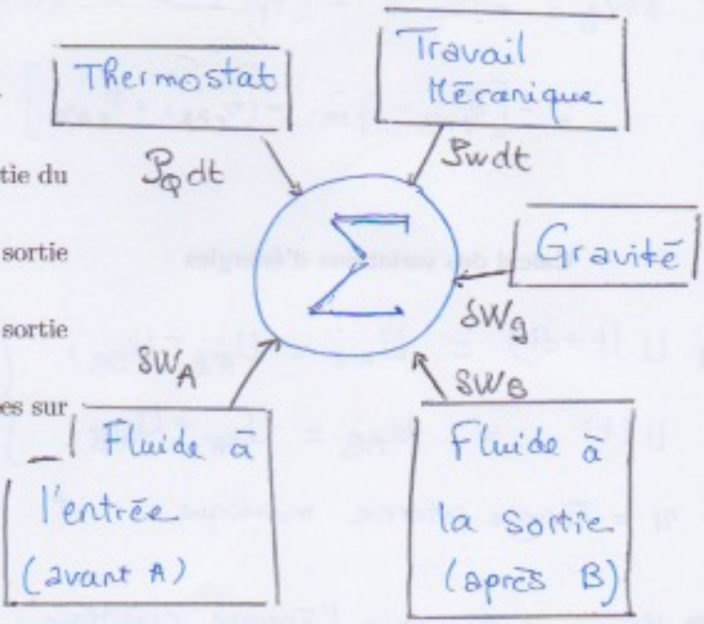
- On étudie l'écoulement dans un référentiel galiléen.
- L'écoulement est supposé permanent.

### 2.2 Expression du premier principe

Imaginons que l'on connaisse les propriétés du fluide à un point $A$. Le fluide passe ensuite par un système industriel (turbine, chaudière, pompe à chaleur, ...) et sort en $B$. On veut connaître les propriétés physiques au point $B$.

Notations :

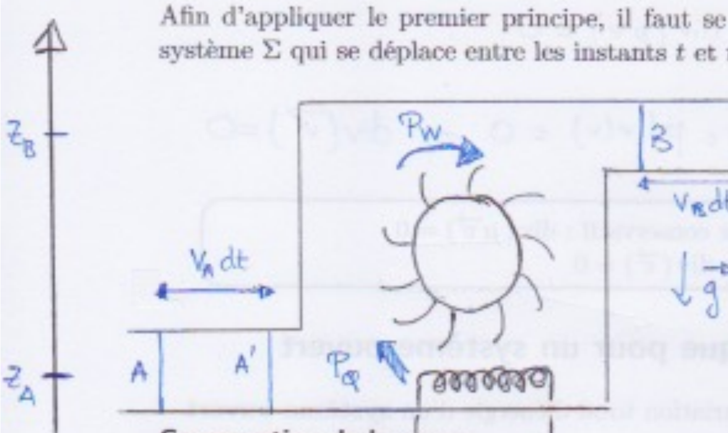
- $\mathcal{P}_W$ la puissance mécanique fournie entre $A$ et $B$.
- $\mathcal{P}_Q$ la puissance thermique fournie au système.
- $S_A$ et $S_B$ les sections du tuyau à l'entrée et la sortie du dispositif.
- $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vitesses du fluide à l'entrée et la sortie du dispositif.
- $P_A$ et $P_B$ les pressions du fluide, à l'entrée et à la sortie du dispositif.
- $z_A$ et $z_B$ les altitudes d'entrée et de sortie, repérées sur un axe $z$ vertical ascendant.

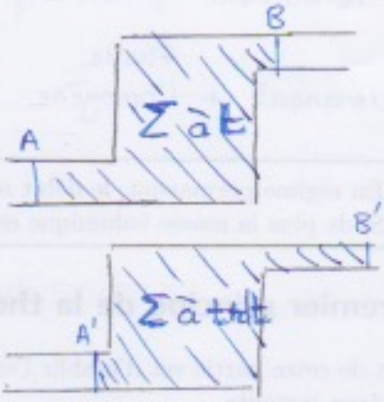



$\Sigma$ = le fluide entre $A$ et $B$ à $t$
= le fluide entre $A'$ et $B'$ à $t+dt$

**Choix du système**

Afin d'appliquer le premier principe, il faut se ramener à un système fermé. On considère alors le système $\Sigma$ qui se déplace entre les instants $t$ et $t + dt$.




**Conservation de la masse**

$\Sigma$ est un système fermé donc $m_\Sigma(t) = m_\Sigma(t+dt)$

$\Rightarrow m_{AA'} + m_{A'B} = m_{A'B} + m_{BB'} \Rightarrow m_{AA'} = m_{BB'} = \delta m$ (notation)

**Travail des forces de pression**

En A : $\delta W_A = \vec{F}.\vec{dl} = + P_A S_A V_A dt$ (Positif car on comprime le gaz en A)

En B : Idem $\delta W_B = -P_B S_B V_B dt$ (Négatif car le gaz se détend en B)

**Travail de la force de pesanteur**

$\delta W_g = -dE_p = -\left[E_p(t+dt) - E_p(t)\right] = -\left[E_{p\,A'B'} - E_{p\,AB}\right]$

$= -\left[E_{pAB} + E_{pBB'} - (E_{pAA'} + E_{pA'B})\right] = E_{pAA'} - E_{pBB'} = \delta m (z_A - z_B) g$

**Calcul des variations d'énergies**

$$\left.\begin{aligned} U(t+dt) &= U_{A'B'} = U_{A'B} + U_{BB'} \\ U(t) &= U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B} \end{aligned}\right\} \quad dU = U_{BB'} - U_{AA'} = \delta m (u_{BB'} - u_{AA'})$$

$u$ = Energie interne massique + Notation $u_B = u_{BB'}$ et $u_A = u_{AA'}$

Même chose pour l'énergie cinétique : $dE_c = \delta m \left(\frac{1}{2} V_B^2 - \frac{1}{2} V_A^2\right)$

#### Écriture du premier principe

Version complète : $dU + dE_c = \sum \delta W + \sum \delta Q$

$$= \delta W_A + \delta W_B + \delta W_g + \mathcal{P}_W dt + \mathcal{P}_Q dt$$

$$\delta m \left[ u_B - u_A + \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right] = \underbrace{P_A S_A V_A dt}_{\delta m \mathcal{V}_m(A)} - \underbrace{P_B S_B V_B dt}_{\delta m \mathcal{V}_m(B)} + \delta m g(z_A - z_B) + \mathcal{P}_W dt + \mathcal{P}_Q dt$$

$$\delta m \left[ (u_B + P_B \mathcal{V}_m(B)) - (u_A + P_A \mathcal{V}_m(A)) \right] + \delta m \left( \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} \right) = \delta m g (z_A - z_B) + \mathcal{P}_W dt + \mathcal{P}_Q dt$$

$$\frac{\delta m}{dt} \left[ (h_B - h_A) + (e_{cB} - e_{cA}) + (e_{pB} - e_{pA}) \right] = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q \qquad \text{Or } \boxed{D_m = \frac{\delta m}{dt}}$$

**Premier principe (version industrielle) :**

Soit un écoulement permanent, de débit massique $D_m$ d'un point $A$ à un point $B$. On note :

- $h$ l'enthalpie massique du fluide
- $e_c$, l'énergie cinétique massique du fluide
- $e_p$, l'énergie potentielle (pesanteur ou autre) massique du fluide
- $\mathcal{P}_Q$ la puissance thermique fournie entre les points $A$ et $B$
- $\mathcal{P}_W$ la puissance mécanique fournie entre les points $A$ et $B$ (autre que les actions déjà prises en compte dans l'énergie potentielle, et les travaux des forces de pression).

Les variations énergétiques massiques entre $A$ et $B$ vérifient :

$$\boxed{D_m \left[ (h_B - h_A) + (e_{cB} - e_{cA}) + (e_{pB} - e_{pA}) \right] = \mathcal{P}_Q + \mathcal{P}_W}$$

## 2.3 Applications

### 2.3.1 La détente de Joule-Thomson

- Pas de sources de travail, de chaleur : $\mathcal{P}_Q, \mathcal{P}_W = 0$
- Écoulement lent : On néglige l'énergie cinétique
- Écoulement à hauteur constante.

$h_B = h_A$ L'enthalpie massique se conserve.

### 2.3.2 Bilan énergétique d'un bassin

En régime stationnaire, on pompe de l'eau d'un bassin, à la température Tb = 363 K, et on cherche à savoir la temérature de l'eau qui entre dans le réservoir, placé $z = 20m$ plus haut. Avant de pénétrer dans le réservoir, l'eau est refroidie dans un échangeur en cédant 45 MJ.$min^{-1}$. On donne également :

- Le débit volumique de la pompe est de $q_v = 180L.min^{-1}$
- La puissance mécanique fournie par la pompe est $P_m = 2kW$.
- La capacité thermique massique de l'eau est $c_m = 4,2kJ.kg^{-1}$ et son énergie cinétique macroscopique est négligeable.

Traduction de l'énoncé : $q_v (c_m \Delta T + 0 + gz) = 2\,kW - 45\,MJ.min^{-1}$

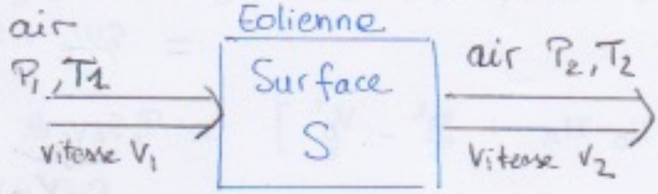
⚠ Attention aux unités $1\,W = 1\,J.s^{-1}$ et $q_v$ est en litres par minutes ! $T_R = 303,5\,K$

$$\Delta T = \frac{1}{c_m} \left[ \frac{2\,10^3 - 45.10^6/60}{180.10^{-3}/60 \times 10^3} - 10.20 \right] = \left[ \frac{-748\,10^3}{3} - 200 \right] \frac{1}{4,2\,10^3} \simeq -59,5\,K$$

### 2.3.3 L'éolienne

On cherche à déterminer la puissance fournie par à une éolienne lorsqu'elle est traversée par le vent. Faisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'air sort de l'éolienne à vitesse nulle.
- Il n'y a pas de transferts thermiques lors du passage de l'air dans l'éolienne.
- L'air est assimilable à un gaz parfait.




Approx : $V_2 = 0$ , $\underset{\mathcal{P}_Q = 0}{\boxed{T_1 = T_2}}$ , gaz parfait donc $h = f(T) \Rightarrow h_2 = h_1$

$e_{c_1} = \frac{V_1^2}{2}$ , $e_{c_2} = 0$ → Hypothèse supplémentaire

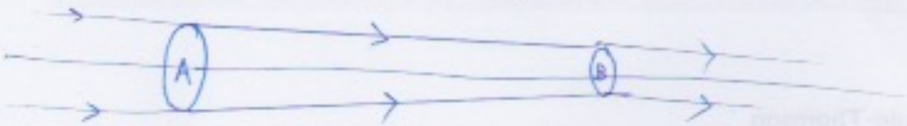
Premier Principe : $D_m \left[ \underbrace{h_2 - h_1}_{=0} + \underbrace{e_{c_2}}_{=0} - e_{c_1} + \underbrace{e_{p_2} - e_{p_1}}_{=0} \right] = \underbrace{\mathcal{P}_Q}_{=0} + \mathcal{P}_W$

$\Rightarrow D_m \left( -\frac{V_1^2}{2} \right) = \mathcal{P}_W$ Or $D_m = \rho S V_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_W = -\frac{1}{2} \rho S V_1^3$

Puissance reçue par l'éolienne $P = \frac{1}{2} \rho S V_1^3$

## 3 Théorème de Bernoulli (hors programme)

Le théorème de Bernoulli se démontre généralement en cours de mécanique des fluides, mais c'est en fait un cas particulier du premier principe que nous venons de démontrer.
Prenons un écoulement permanent, et considérons un tube de courant très fin, entre une section centrée sur un point $A$ et une section centrée sur un point $B$.




Supposons en plus que :

- Il n'y a pas de chaleur échangée lors de l'évolution du fluide entre $A$ et $B$
- Les forces autres que les forces de pression et pesanteur sont nulles (notamment pas de viscosité).
- L'écoulement est incompressible. Cela permet [1] de dire que la masse volumique est uniforme le long d'un fin tube de courant.

$$D_m \left[ h_B - h_A + e_{c_B} - e_{c_A} + e_{p_B} - e_{p_A} \right] = \underbrace{\mathcal{P}_W}_{=0} + \underbrace{\mathcal{P}_Q}_{=0}$$

$$\Rightarrow \cancel{u_B} + P_B v_B - \cancel{u_A} + P_A v_A + \frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} + g z_B - g z_A = 0$$

Or $v_B = v_A = \frac{1}{\rho}$ le volume massique $= 1 /$ masse volumique (constante sur la ligne de courant)

d'où $$\left( P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z \right)(A) = \left( P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z \right)(B)$$

1. Il faut écrire la conservation de la masse volumique le long d'une ligne de courant en réécrivant l'équation de conservation de la masse, simplifié par le fait que $\text{div}(\overrightarrow{v}) = 0$.

**Théorème de Bernoulli (version écoulement permanent incompressible) :**

Dans un référentiel galiléen, on suppose un écoulement :

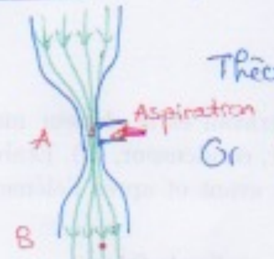
- Permanent
- Incompressible
- Parfait (pas de dissipation)
- Sans actions autres que la pesanteur

Alors entre deux points $A$ et $B$ d'**une ligne de courant de l'écoulement,** la charge $\mathcal{C}$ de l'écoulement est constante :

$$\boxed{\left[P + \mu\frac{v^2}{2} + \mu g z\right]_A^B = 0}$$

Exemples d'utilisation (hors programme) :

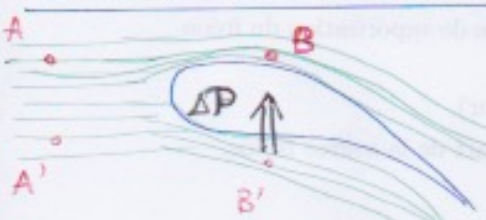
**Effet Venturi :** Lorsqu'on réduit la section d'un tuyau en écoulement, on crée une aspiration




Théorème de Bernoulli : $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$ + on néglige la pesanteur

Or $V_A > V_B$ donc $P_A < P_B$ $\Rightarrow$ Aspiration au point A

**Portance d'une aile d'avion :**

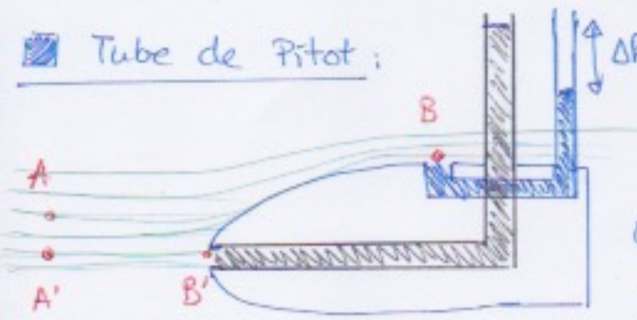



$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A')$ car loin de l'aile, les caractéristiques de l'écoulement sont les même.

$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{C}(A') = \mathcal{C}(B')$

donc $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(B')$ et $V_B > V_{B'}$ donc $P_{B'} > P_B$

**Tube de Pitot :**




Même idée que pour la portance mais cette fois on suppose que l'air est bloqué en $B' \Rightarrow V_{B'} = 0$

On a alors $P_B + \mu\frac{V_B^2}{2} = P_A$

$V_B = \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta P} = \sqrt{2 g \Delta h}$

On peut connaître la vitesse de l'écoulement (c'est utilisé dans les avions)

## 4 Étude d'une machine frigorifique

On étudie en régime permanent une machine frigorifique, qui fonctionne en utilisant un écoulement de fréon et les changements d'état pour transférer une grande quantité d'énergie. On utilisera le diagramme $(T, S)$ du fréon (voir page suivante) pour représenter les différentes étapes du cycle.

Le fréon réalise les quatre étapes suivantes :

- Étape $1 \rightarrow 2$ : Le fluide passe dans un compresseur, où il subit une détente adiabatique réversible.
- Étape $2 \rightarrow 3$ : Le fluide passe dans un condenseur où il cède de la chaleur à la source chaude en se condensant. Cette évolution est isobare.
- Étape $3 \rightarrow 4$ : Le fluide subit une détente adiabatique, de type Joule-Thomson.
- Étape $4 \rightarrow 1$ : Le fluide passe dans un évaporateur où il reçoit de la chaleur de la source froide en s'évaporant. Cette évolution est isobare.

On donne en plus quelques valeurs numériques :

- La température du fréon lors de l'évaporation est de $-10$ °C.
- La pression $P_2$ à la fin du compresseur est de 15 bars.
- Au point 3, le fréon est sous forme de liquide saturé.
- Au point 1, le fréon est sous forme de vapeur saturée.

1. Pour un élément quelconque de la machine, on note $w$ et $q$ le travail et la chaleur massique reçus par le fréon lors de son passage dans l'élément (compresseur, condenseur, ...). Établir une relation entre $w$, $q$ et la variation d'enthalpie massique du fréon avant et après l'élément. On négligera l'énergie cinétique macroscopique de l'écoulement.
2. Placer les étapes 1, 2, 3, 4 sur le diagramme et tracer le cycle que réalise le fréon.
3. Déterminer par lecture les valeurs de $P$, $T$, et $h$ aux quatre points.
4. Si l'évolution $1 \rightarrow 2$ était non réversible, comment évoluerait la température en sortie (toujours avec $P_2 = 15$ bars).
5. Comment trouver de deux façons différentes la chaleur latente massique de vaporisation du fréon $\ell(T)$ à une température $T$ quelconque.
6. Donner la valeur de $x_4$, la fraction massique de vapeur (titre en vapeur).
7. Déterminer la quantité de chaleur massique reçue par le fréon de la part de la source froide.
8. Même question pour la source chaude.
9. Déterminer le travail massique reçue par le fréon lors de la compression.
10. Calculer l'efficacité de la machine frigorifique.

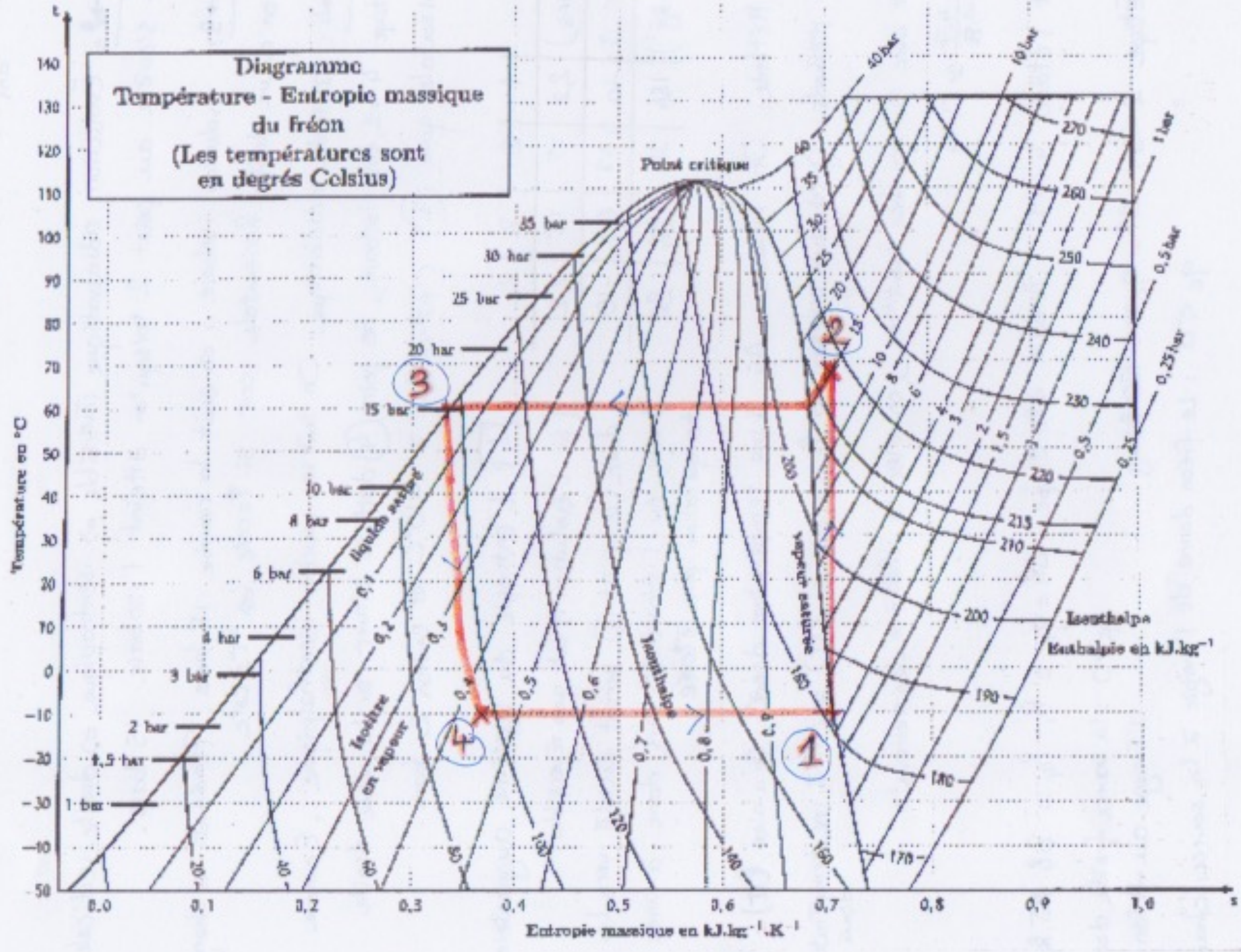


Diagramme
Température - Entropie massique
du fréon
(Les températures sont
en degrés Celsius)
Température en °C
Entropie massique en kJ.kg⁻¹.K⁻¹
Point critique
liquide saturé
vapeur saturée
Isotitre en vapeur
Isenthalpe
Isenthalpe
Enthalpie en kJ.kg⁻¹
1 bar
1,5 bar
2 bar
3 bar
4 bar
6 bar
8 bar
10 bar
15 bar
20 bar
25 bar
30 bar
35 bar
40 bar
10 bar
1 bar
0,5 bar
0,25 bar
1
2
3
4

1! $D_m \left[ \Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} \right] = \mathcal{P}_Q + \mathcal{P}_W$

$\Delta h = \dfrac{\mathcal{P}_Q dt + \mathcal{P}_W dt}{\delta m} = \dfrac{Q + W}{\delta m} = q + w$ relation "massique" : $\Delta h = w + q$

2! **1→2 :** Evolution adiabatique réversible ⇒ isentropique ⇒ droite verticale. On s'arrête au point 2 lorsqu'on atteint l'isobare 15 bars.

**2→3 :** Evolution isobare : on suit la courbe 15 bars. Pendant le changement d'état, on a une droite horizontale car si $P = cste \Rightarrow T = cste$

**3→4 :** Détente adiabatique : On suit une courbe isenthalpique. Comme l'étape 4→1 est isobare, le point (4) doit se situer sur la même droite horizontale que (1) c'est-à-dire à −10°C et environ 2 bars.

3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P (bars) | 2,2 | 15 | 15 | 2,2 |
| T (°C) | -10 | +67 | 60 | -10 |
| h (kJ.kg⁻¹) | 184 | 216 | 96 | 96 |

4 L'entropie du système augmenterait (si l'évolution n'est pas réversible) donc le point (2) serait décalé vers la droite, sur l'isobare 15 bars, donc à une température plus élevée.

5 1ère Méthode : On mesure $\Delta s$ à une température donnée. On a alors $\ell(T) = T\Delta s$

2ème Méthode : grâce aux courbes iso-h, on mesure $\ell(t) = \Delta h$ à une température donnée

6 On lit avec les courbes isotitres, ou avec le théorème des moments

$x_4 = \dfrac{4,7}{10,8} \simeq 0,44$

7 C'est l'étape 4→1. Pendant cette étape $\Delta h = q_F = h_1 - h_4 \simeq 88$ kJ.kg⁻¹

$q_F > 0$ : la source froide donne de l'énergie au fréon.

8 Idem : Etape 2→3 : $\Delta h = q_C \simeq -120$ kJ.kg⁻¹

$q_C < 0$ : Le fréon donne de l'énergie à la source chaude

9 Etape 1→2 : On a alors $\Delta h = w_{1\to2}$ (ou alors $\Delta h_{total} = 0 = w_{1\to2} + q_F + q_C$)

$w_{1\to2} = 32$ kJ.kg⁻¹

10 $e = \left| \dfrac{q_F}{w_{1\to2}} \right| = \dfrac{88}{32} \simeq 2,75$ Ordre de grandeur classique pour les réfrigérateurs