# Thermodynamique 9 : Diffusion thermique

École Centrale Pékin

2019-2020

Année 3

## Table des matières


**1 Transport de chaleur** 2
- 1.1 Différences avec la diffusion de particules . . . 2
- 1.2 Définition . . . 3
- 1.3 Diffusion, Convection, Rayonnement ? . . . 3

**2 Modélisation de la diffusion** 4
- 2.1 Vecteur densité de courant thermique . . . 4
- 2.2 Loi phénoménologique de FOURIER (1822) . . . 4
- 2.3 Sources et puits de chaleur . . . 5
- 2.4 Bilan d'énergie . . . 6
- 2.5 Équation de diffusion thermique / Équation de la chaleur . . . 6

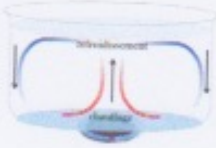
**3 Particularités de la diffusion de la chaleur** 7
- 3.1 Contact entre deux solides . . . 7
- 3.2 Loi des mouvements conducto-convectifs / Loi de Newton . . . 7
- 3.3 Diffusion thermique en régime permanent à une dimension . . . 8
- 3.4 Analogie électrique - thermique . . . 8

**4 Exercices** 9

# 1 Transport de chaleur

Nous avons vu dans le chapitre 3 qu'il existe trois modes de transfert thermique :

1. **La convection**
   La convection correspond à des **transports macroscopiques de la matière**. Par exemple, dans un fluide, les différences de température dans un milieu entraînent des mouvements convectifs. Autre exemple, l'air chaud au voisinage d'un radiateur d'une pièce, plus léger, s'élève et est remplacé par de l'air froid provoquant un mouvement de convection.



2. **Le rayonnement thermique**
   Tout objet émet des ondes électromagnétiques qui transportent de l'énergie. Nous faisons cette expérience au quotidien : s'il fait plus chaud le jour que la nuit, c'est parce que le soleil chauffe la surface terrestre avec son rayonnement (visible ou non). Contrairement à la conduction et à la convection qui nécessitent un milieu matériel, **le rayonnement est un transport d'énergie par ondes électromagnétiques, il ne nécessite donc aucun support.**

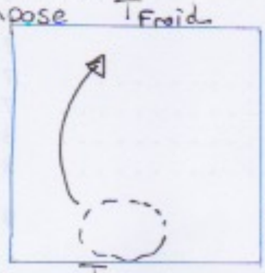
3. **La Diffusion (ou conduction thermique)**
   La diffusion de la chaleur est aussi appelée de manière abusive la conduction thermique. Ce type de transfert se fait **en présence d'un milieu matériel mais sans transport macroscopique de matière.** C'est ce type de transport de la chaleur que nous allons décrire dans ce chapitre.

Nous allons étudier la diffusion séparément des autres transferts thermiques, mais dans le cas général, les trois types de transferts thermiques ont lieu en même temps.

## 1.1 Différences avec la diffusion de particules

Dans le cas des fluides, une différence de température crée très souvent un phénomène de convection spontanée :

On impose $T_{froid}$



On impose $T_{chaud}$

La particule se réchauffe

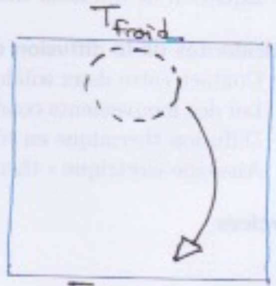
① $\rho(T_c) < \rho(T_f)$

La particule monte

② La particule se refroidit

elle redescend.

$T_{froid}$



$T_{chaud}$

Nous étudierons la diffusion thermique uniquement dans les solides.

On rappelle que, pour un solide, on fait très souvent l'hypothèse que l'énergie interne ne dépend que de la température. Et de plus on considère souvent que la capacité thermique ne dépend pas de la température.

Dans l'approximation du solide idéal, on peut toujours écrire :

$$dU = CdT$$

### 1.2 Définition

On appelle diffusion thermique **le transport de l'énergie interne** de proche en proche au sein d'un solide.

Ce transport d'énergie interne se fait sans transport macroscopique de matière.

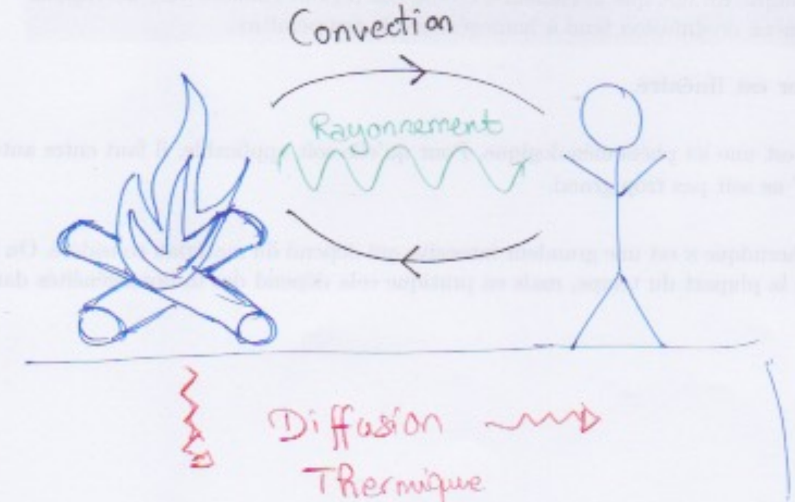
### 1.3 Diffusion, Convection, Rayonnement ?

Comme pour la diffusion de particules, la diffusion thermique est souvent cachée par les autres formes de transport de la chaleur. Donnons quelques exemples :

- Dans l'air et dans l'eau, le transport de la chaleur se fait très souvent par convection.
- La sensation de chaleur lorsque l'on est proche d'un feu est principalement due au rayonnement. La convection de l'air entre aussi en jeu mais faiblement. Pour s'en convaincre, on peut mettre un feuille de papier journal devant le feu, ce qui bloque quasi-instantanément les transferts thermiques par rayonnement.
- À l'intérieur de la terre, dans le manteau terrestre, on a un mouvement de convection. C'est d'ailleurs ce qui est à l'origine de la tectonique des plaques (构造运动 ).

Mais il existe aussi de nombreux cas dans la vie courante ou c'est bien la diffusion thermique qui joue un rôle important :

- Pour l'isolation des bâtiments, les principales pertes thermiques sont dues à de la diffusion thermique. On cherche donc a utiliser les matériaux avec le plus faible coefficient de diffusion pour éviter les pertes.
- La température dans le sol est également due à la diffusion de la température en surface (exercice en TD). C'est pourquoi on construit des caves pour éviter les variations de températures journalières et annuelles.
- Dans l'épiderme (la peau humaine), on a également un phénomène de diffusion de la chaleur. Attention, "la sensation de chaleur" que nous avons est due au flux de chaleur $\Phi$ et pas directement à la valeur de la température.



# 2 Modélisation de la diffusion

## 2.1 Vecteur densité de courant thermique

### 2.1.1 Définition

On ne peut pas écrire simplement le vecteur densité de courant thermique comme une densité de quelque chose multiplié par une vitesse d'un point matériel. On définit alors le vecteur densité de courant thermique à l'aide de son flux.

Soit $d\overrightarrow{S}(M)$ une petite surface élémentaire, on définit **le vecteur densité de courant thermique** par la relation :

$$\boxed{d\Phi_Q = \overrightarrow{j_Q}(M,t).d\overrightarrow{S}(M)}$$

où $d\Phi_Q$ représente la puissance thermique élémentaire qui traverse la surface $d\overrightarrow{S}(M)$. L'unité de $\overrightarrow{j_Q}$ est le $W.m^{-2}$.

### 2.1.2 Interprétation

Pendant un intervalle de temps $dt$, la quantité élémentaire $\delta Q$ de chaleur qui traverse la surface infinitésimale $d\vec{S}(M)$, compté positivement dans le sens de $d\vec{S}$ est :

$$\boxed{\delta Q(M,t) = d\Phi_Q\, dt = \overrightarrow{j_Q}.d\overrightarrow{S}\, dt}$$

## 2.2 Loi phénoménologique de Fourier (1822)

### 2.2.1 Énoncé et conditions de validité

On constate **expérimentalement** que le *vecteur densité de courant thermique* est relié à la température par la loi phénoménologique :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q}(M,t) = -\kappa\, \overrightarrow{grad}\, T(M,t)}$$

**$\kappa$ est une constante positive appelée *conductivité thermique* du matériau (<u>unité</u> : $W.m^{-1} \cdot K^{-1}$).**

Le signe - rend compte du fait que la chaleur s'écoule des régions chaudes vers les régions froides : le phénomène de diffusion tend à homogénéiser la température.

- **La loi de Fourier est linéaire.**

- La loi de Fourier est une loi phénoménologique. Pour qu'elle soit applicable, il faut entre autre que l'écart $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ ne soit pas trop grand.

- La conductivité thermique $\kappa$ est une grandeur intensive qui dépend du matériau considéré. On la prendra uniforme la plupart du temps, mais en pratique cela dépend des in-homogénéités dans le solide.

### 2.2.2 Ordres de grandeurs

| Matériau | conductivité $\kappa$ [$W.m^{-1}.K^{-1}$] |
|---|---|
| Cuivre | 390 |
| Acier | 50-60 |
| Béton | 1-2 |
| Verre | 1-1,5 |
| Bois | 0,2 |
| Polystyrène | 0,03 |
| Eau immobile | 0,6 |
| Air immobile | 0,024 |

⚠ **Attention**
*Pour les fluides comme l'air et l'eau, les conductivités thermiques ne sont pertinentes que si le fluide est au repos.*

## 2.3 Sources et puits de chaleur

Les "sources" de chaleur sont en fait des mécanismes qui transfèrent de l'énergie d'une certaine forme vers de l'énergie interne (c'est-à-dire de l'énergie d'agitation thermique, sous forme désordonné). Par exemple :

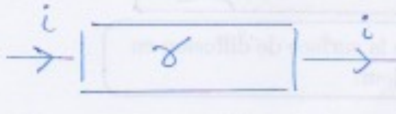
- L'énergie du champ électromagnétique qui est donnée aux porteurs de charges, et qui se transforme en chaleur par effet Joule.
- L'énergie cinétique d'un fluide qui diminue par frottement visqueux.
- L'énergie potentielle chimique qui se transforme en énergie cinétique microscopique des produits de la réaction.

Pour modéliser ces sources, comme pour les particules, on introduit la puissance volumique créée au point M, à la date $t$, noté $\mathcal{P}_{vol}$ définie comme suit :

La puissance volumique créée au point M, à la date $t$ noté $\mathcal{P}_{vol}$ représente la quantité d'énergie apportée au matériau par unité de volume et par unité de temps (unité : $W.m^{-3}$).

$\mathcal{P}_{vol} > 0$ lorsque de l'énergie est apportée au solide à la date $t$ et au point M.
$\mathcal{P}_{vol} < 0$ lorsque de l'énergie est "prise" au solide à la date $t$ et au point M.

Exemple Classique : Chauffage par effet Joule




Puissance volumique d'énergie créée $\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ et $(\vec{j} = \gamma \vec{E})$

$\delta Q = \mathcal{P}_{vol} \cdot dt$ = Quantité élémentaire de chaleur reçue pendant $dt$

### 2.4 Bilan d'énergie

- En présence de sources de chaleurs, l'équation locale de conservation de l'énergie s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div}\overrightarrow{j_Q}(M,t) = \mathcal{P}_{vol}(M,t)}$$

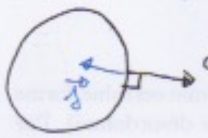
Démonstration : $dU = \delta Q + \delta W$ On étudie un solide donc on fait 2 approximations : $V = C^{te}$ (et $dU = C dT$)

- $dU = \delta Q = U(t+dt) - U(t) = \iiint \frac{\partial u}{\partial t}\, dt\, d\tau$
- $\delta Q_{créée} = \iiint \mathcal{P}_{vol}\, d\tau\, dt$
- $\delta Q_{ech} = -\oiint \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{dS}\, dt$

Bilan : $\iiint d\tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\overrightarrow{j_Q})\right] dt = \iiint \mathcal{P}_{vol}\, dt\, d\tau$

Vrai $\forall$ Volume

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\overrightarrow{j_Q}) = \mathcal{P}_{vol}$$




### 2.5 Équation de diffusion thermique / Équation de la chaleur

- Si la loi de Joule est valable, la température $T(M,t)$ dans un matériau suit une équation de diffusion (on parle aussi de l'équation de la chaleur) :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T + \frac{\mathcal{P}_{vol}}{\rho c}}$$

avec $D = \frac{\kappa}{\rho c}$ le coefficient de diffusion du matériau (de dimension toujours égale à $\frac{L^2}{T}$), $\rho$ est la masse volumique et $c$ la capacité thermique massique.

⚠ on a aussi besoin de l'hypothèse que $K$ ne dépend pas de l'espace

En effet,

- $\overrightarrow{j_Q} = -K\, \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ Loi de Joule
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\overrightarrow{j_Q}) = \mathcal{P}_{vol}$ Conservation de l'énergie
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ Approximation pour les solides ($dU = C dT$)

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(-K\overrightarrow{\text{grad}}(T)) = \mathcal{P}_{vol} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\Delta T + \frac{\mathcal{P}_{vol}}{\rho c}}$$

Toutes les caractéristiques des phénomènes diffusifs ( croissance de la surface de diffusion en $\sqrt{t}$, irréversibilité,...) sont aussi valables pour l'équation de la chaleur.

**Ordre de grandeur :**
Pour refroidir un aliment (assimilé à de l'eau, de conductivité thermique $\kappa = 0{,}6$ W. m$^{-1}$.K et de capacité thermique $c = 4$ J.kg$^{-1}$.K$^{-1}$) de 10cm de diamètre, il faut $T = \frac{L^2}{D} \approx 4$ heures. Pour un aliment de 1cm de diamètre, on divise le temps par 100, soit environ 2 minutes et demi.

# 3 Particularités de la diffusion de la chaleur

## 3.1 Contact entre deux solides

### 3.1.1 Définition

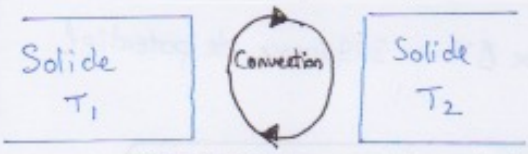
Dans le cas de la diffusion des particules, on avait supposé que le vecteur densité de particule était continue. Ici on va supposer la même chose pour $j_Q$ entre deux solides, si ils sont en contact thermique parfait.

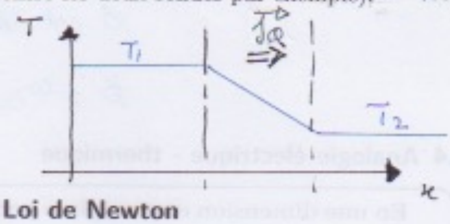
> Deux solides sont en *contact thermique parfait* si l'interface entre les deux systèmes est de volume nulle.
>
> Dans ce cas là, la température $T$ et le courant thermique $\vec{j}_Q$ sont continus à l'interface.

Contact thermique parfait ⇒ Volume nul ⇒ Ne peut pas stocker de l'énergie, donc toute l'énergie qui rentre d'un côté ressort de l'autre. ⇒ $\vec{j_Q}$ est continu.

Si la Température est discontinue, alors on a propagation de la chaleur sur une distance $L \propto \sqrt{Dt}$ et comme l'interface est d'épaisseur nulle, la propagation est instantanée donc T est continu à l'interface.

Si le contact thermique n'est pas parfait (couche d'air entre les deux solides par exemple), le vecteur courant thermique n'est plus continu à l'interface.




## 3.2 Loi des mouvements conducto-convectifs / Loi de Newton

Dans de nombreux cas, le solide sera en contact avec un fluide, qui donc aura un mouvement complexe du à la convection et la diffusion.

On utilise alors une loi expérimentale (appelée "loi des mouvements conducto-convectifs" ou loi de Newton) qui permet de relier la densité de courant à la différence de température entre le fluide et le solide.

> À l'interface entre un solide 1 et un fluide 2 (ou entre deux solides dont le contact thermique n'est pas parfait), la température peut être discontinue. Les températures $T_1$ et $T_2$ de part et d'autre de l'interface peuvent être différentes. Le courant thermique à l'interface ~~est continu et~~ s'écrit alors :
>
> $$\boxed{\vec{j}_Q = h(T_1 - T_2)\vec{n}_{12}}$$
>
> où $\vec{n}_{12}$ est la normale à l'interface, orienté de 1 vers 2
>
> $h$ est un coefficient positif qui représente le mouvement du fluide à l'interface avec le solide (unité : W.m$^{-2}$.K$^{-1}$).

Si deux solides ne sont pas directement en contact, mais séparés par une fine couche de fluide, on pourra utiliser cette loi comme condition à l'interface entre les deux solides.

### 3.3 Diffusion thermique en régime permanent à une dimension

En régime stationnaire, en l'absence de sources, l'équation de la diffusion de la chaleur s'écrit :

$$\Delta T(M,t) = 0$$

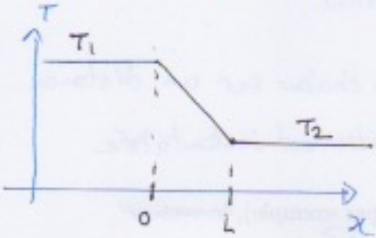
ce qui constitue une équation de Laplace. Cette équation admet une unique solution si l'on spécifie les conditions aux limites sur la température $T$ ou sur le flux $\Phi$ [1].

Dans le cas stationnaire, on peut simplifier l'équation en :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(M,t) = 0$$

Pour des conditions aux limites données, on peut alors résoudre le problème

$T(x) = Ax + B$ $\quad T(0) = T_1$, $T(L) = T_2$ $\Rightarrow T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$




Flux Thermique $\phi = \iint \vec{j_Q} \cdot \vec{dS} = j_Q S$

$\phi = -K \frac{dT}{dx} \cdot S = \frac{KS}{L}(T_2 - T_1)$

$\phi$ est identique entre 0 et L

$\phi$ = courant $= \propto \Delta T$ ← Différence de potentiel

### 3.4 Analogie électrique - thermique

**En une dimension et en régime permanent**, on peut faire une analogie entre la diffusion thermique dans un solide et le transport de courant électrique dans une résistance.

| Grandeur | Électrique | Thermique |
|---|---|---|
| Schéma | $i$ ; $V_1 \rightarrow [R] \rightarrow V_2$ | $\phi$ ; $T_1 \rightarrow [R_{th}] \rightarrow T_2$ |
| Débit | i | $\Phi$ |
| Différence | $V_1$ - $V_2$ | $T_1$ - $T_2$ |
| Résistance | $R = \frac{L}{\gamma S}$ | $R_{th} = \frac{L}{\kappa S}$ |
| Loi d'Ohm | $V_1$ - $V_2 = Ri$ | $T_1$ - $T_2 = R_{th}\Phi$ |
| Conductivité | $\gamma$ | $\kappa$ |
| Loi locale | $\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\overrightarrow{\text{grad}}V$ | $\vec{j_Q} = -\kappa\overrightarrow{\text{grad}}T$ |

1. Mais attention, certaines conditions aux limites font que l'on ne peut pas trouver de solutions, ou alors qu'il n'y a pas unicité de la solution.

## 4 Exercices

### Double vitrage

On considère une surface $S$ vitrée d'épaisseur $e$, entre l'intérieur d'une pièce, à la température $T_i$ et l'extérieur, à la température $T_e$.
On suppose le problème unidimensionnel et on se place en régime stationnaire.

La vitre a un coefficient de conductivité $\kappa$, et les échanges thermiques entre l'air et le verre peuvent être modélisées par la loi des transferts conducto-convectifs $\overrightarrow{j_Q} = h(T_1 - T_2)\overrightarrow{n}_{12}$.

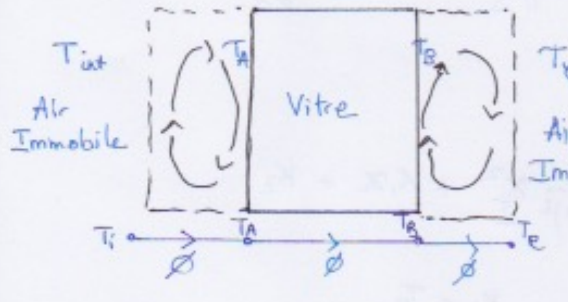
On constate expérimentalement que pour le contact entre le verre et l'air extérieur, $h = h_e$, et pour le contact entre le verre et l'air à l'intérieur d'une pièce, $h = h_i$ (avec $h_e \approx 2h_i$).

1. Calculer la résistance associée à la loi des transferts conducto-convectifs / loi de Newton.
2. Calculer la résistance équivalente créée par une seule vitre.
3. On améliore l'isolation en mettant un double vitrage, c'est-à-dire deux vitres à la suite, séparées par une fine couche d'air. Calculer la résistance équivalente au double vitrage.
4. En pratique, il y a aussi des pertes thermiques par les murs, qui sont constitués d'un isolant puis de béton. Comment modifier le modèle électrique précédent ?

1. $\phi = \iint \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{dS} = j_Q \cdot S = hS(T_1 - T_2)$ $\qquad i = \frac{U}{R} = \frac{\Delta V}{R}$

donc ici $R_{th} = \frac{1}{hS}$

2. On a de chaque côté de la vitre de l'air mobile et de l'air immobile




$(T_i - T_A) = R_{th\,int}\,\phi = \frac{1}{h_i S}\phi$

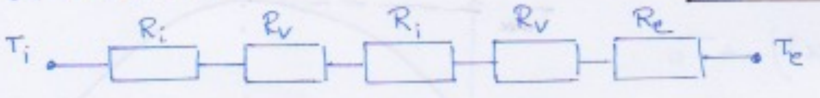
$(T_A - T_B) = R_{vitre}\,\phi = \frac{e}{\kappa S}\phi$

$(T_B - T_e) = R_{th\,ext}\,\phi = \frac{1}{h_e S}\phi$

Finalement $(T_i - T_e) = \underbrace{\left(R_{th\,int} + R_{vitre} + R_{th\,ext}\right)}\phi$

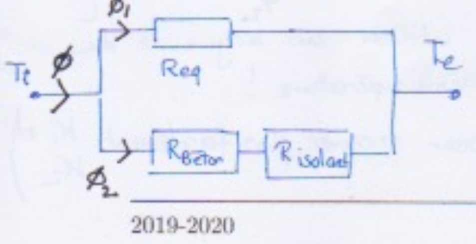
$(T_i - T_e) = R_{eq}\,\phi$

3. Même chose




$R_{eq} = \frac{2}{h_i S} + \frac{2e}{\kappa S} + \frac{1}{h_e S}$

4. Le flux peut passer soit par les vitres, soit par le mur




$$\begin{cases} (T_i - T_e) = \phi_1 R_{eq} \\ (T_i - T_e) = \phi_2 (R_{béton} + R_{isolant}) \\ \phi_1 + \phi_2 = \phi \end{cases} \Rightarrow \frac{(T_i - T_e)}{R_{eq}} + \frac{(T_i - T_e)}{R_B + R_i} = \phi$$

$$\Rightarrow (T_i - T_e) = \frac{R_{eq}(R_B + R_i)}{R_{eq} + R_B + R_i}\,\phi$$

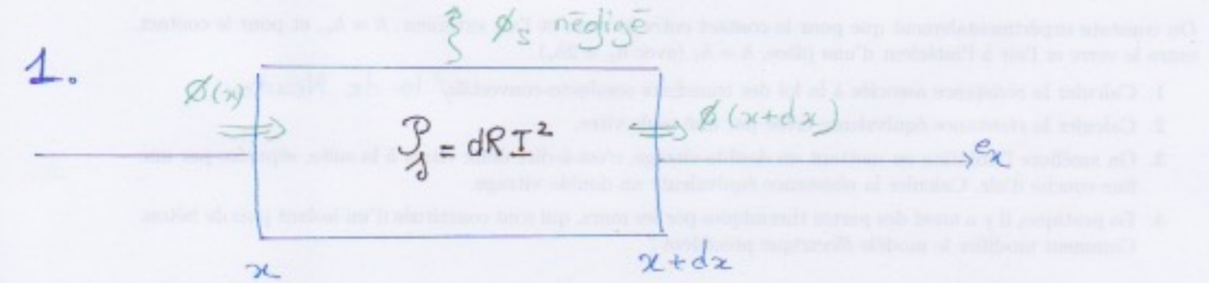
Association de résistances en parallèle

### ✎ Chauffage d'un fil

On considère un fil cylindrique de conductivité électrique $\gamma$, de conductivité thermique $\lambda$, de rayon $a$ et de longueur $L$. On suppose que $T(0) = T(L) = T_0$. Le fil est parcouru par un courant électrique d'intensité constante $I$. On néglige les pertes thermiques à travers la surface latérale et on se place en régime stationnaire.

1. Établir l'équation de conservation de l'énergie interne et en déduire la température $T(x)$ dans le fil.
2. Pour quelle abscisse la température passe-t-elle par un maximum ? Était-ce prévisible ?

1.




- $dU = 0$ car régime stationnaire
- $dU = \delta Q = \mathcal{P}_J\,dt + \phi(x)\,dt - \phi(x+dx)\,dt$ Or $dR = \dfrac{dx}{\gamma S}$

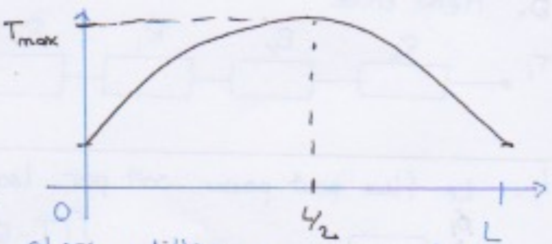
$$0 = dR\,I^2 + (\phi(x+dx) - \phi(x)) = \frac{dx}{\gamma S} I^2 - dx\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{I^2}{\gamma S} \qquad \text{Or } \phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\cdot S$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-I^2}{\lambda\gamma(\pi a^2)^2} \Rightarrow T(x) = \frac{-I^2}{\lambda\gamma(\pi a^2)^2}\frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2$$

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = K_2 \\ T(L) = T_0 = \dfrac{-I^2}{\lambda\gamma(\pi a^2)^2}\dfrac{L^2}{2} + K_1 L + T_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} K_1 = T_0 \\ K_2 = \dfrac{I^2}{\lambda\gamma(\pi a^2)^2}\dfrac{L}{2} \end{array}$$

$$T(x) = \frac{I^2}{2\lambda\gamma\pi^2 a^4}(Lx - x^2) + T_0$$




2. La température est maximale au milieu du fil. On peut le démontrer en dérivant ou alors utiliser un argument de symétrie : le plan $x = L/2$ est un plan de symétrie pour la température !
(On peut d'ailleurs changer l'origine du pb en $x = L/2$ pour trouver plus facilement $K_1$ et $K_2$)