Travaux dirigés de Thermodynamique 10 :
Diffusion de particules

École Centrale Pékin

2019-2020 - Année 3

Exercice 1 : Diffusion de neutrons dans un réacteur cylindrique

On considère un réacteur cylindrique de rayon R_1, d'axe $\overrightarrow{e}_z$, et de très grande longueur h de sorte qu'on peut supposer que le problème est invariant suivant la direction $\overrightarrow{e}_z$.

On note $n(r,t)$ la densité de neutrons dans le réacteur.
En $r = R_1$, un dispositif absorbe les neutrons de sorte que $n(R_1,t) = 0$.

Entre $r = 0$ et $r = R_0$ (avec $R_0 < R_1$), la réaction nucléaire génère des neutrons, que l'on modélise par une distribution volumique de sources de neutrons σ_0 constante.

La densité de neutrons diffusés suit la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

1. En faisant un bilan de matière, établir l'équation de diffusion vérifiée par la densité $n(r,t)$. On donne , en géométrie cylindrique $\overrightarrow{grad}(X) \cdot \overrightarrow{e}_r = \dfrac{\partial X}{\partial r}$.
2. En régime stationnaire, établir l'expression de la densité de neutrons en tout point du réacteur.
3. Quelle quantité de neutrons quitte le réacteur pendant dt ? Comparer cette valeur avec la quantité de neutrons créés pendant ce temps.

Exercice 2 : Diffusion de déchets radioactifs

On enfouit des déchets radioactifs dans la terre à une distance ℓ de la surface du sol. On suppose le problème unidimensionnel et on prendra l'origine des x à l'endroit où sont placés les déchets. On s'intéresse à la diffusion des déchets vers la surface.

On suppose de plus que la terre peut absorber une partie des déchets. On écrit alors la densité volumique totale de déchets sous la forme :

$$n_t(x,t) = n(x,t) + n_a(x,t)$$

avec $n(x,t)$ la densité volumique des espèces mobiles et $n_a(x,t)$ la densité volumique des espèces absorbés (et donc fixes). On modélise l'absorption par unité de temps, avec la relation suivante :

$$n_a(x,t) = Kn(x,t)$$

Les déchets mobiles suivent la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion D. On notera j le vecteur de densité de courant de particules.

1. Expliquer en quelques mots l'équation qui modélise l'absorption. Pourquoi cette équation ne peut être valable qu'aux faibles concentrations et comment peut-elle être modifiée pour les fortes concentrations ?
2. Faire un bilan de matière et montrer que $n(x,t)$ vérifie une équation de diffusion sans source dont on précisera le coefficient de diffusion.
3. On prend les conditions aux limites suivantes : $n(0,t) = n_0$ et $n(\ell,t) = 0$. Donner alors la distribution $n_s(x)$ des espèces mobiles dans le cas stationnaire.

Exercice 3 : **Taille d'une bactérie**

On considère un milieu infini d'eau avec une concentration en dioxygène dissous constante notée n_0.

On place une bactérie dans ce milieu. La bactérie est modélisée par une sphère de rayon R et de masse volumique μ égale à celle de l'eau. Pour vivre une bactérie a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau, au voisinage de sa surface. On admet que le nombre de moles de dioxygène consommé par la bactérie par unité de temps est proportionnelle à sa masse, de facteur de proportionnalité A.

On se place dans le régime stationnaire et on note $n(r)$ la densité du dioxygène dissous à la distance r du centre de la bactérie. La diffusion du dioxygène dans l'eau obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

À grande distance de la bactérie, la densité du dioxygène est supposée rester constante de valeur n_0.

1. Donner la dimension du facteur A.
2. Exprimer $\overrightarrow{j}(M)$ le vecteur densité de flux de particules diffusées en fonction de D et $n(r)$.
3. Pour une sphère de rayon $r > R$, exprimer le nombre $\Phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant par unité de temps dans la sphère en fonction de j. Cette valeur dépend-elle de r ?
4. En reliant n et Φ, déterminer n_s la densité de particules de dioxygène dissous sur la surface de la bactérie. Exprimer le résultat en fonction de n_0, D, R et Φ.
5. Exprimer Φ en fonction de R, $\mathcal{N}_a$, μ et A.
6. En déduire l'expression du rayon maximal que peut avoir une bactérie.