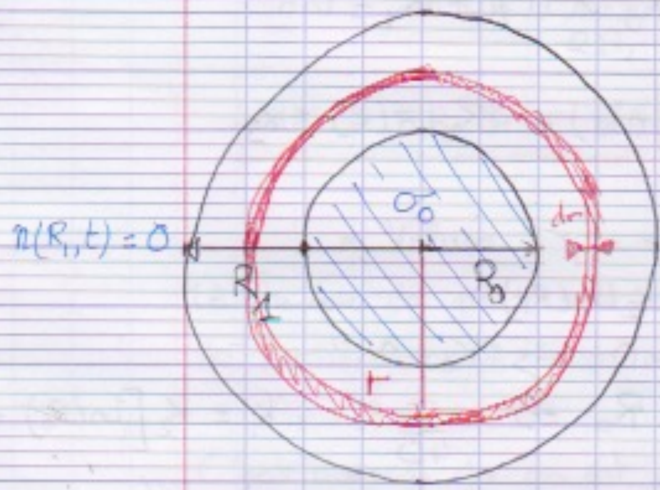
TD 10 Thermo : Diffusion de Particules

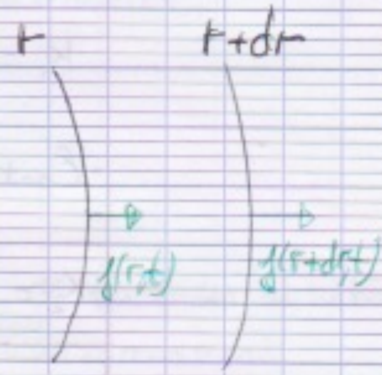
Exercice 1



1) Avec les symétries du problème, on peut dire que $\vec{j}(\vec{r},t) = j(r,t)\,\vec{e_r}$

On fait un bilan sur une surface qui respecte les symétries du problème

Un couronne cylindrique entre r et $r+dr$



- Particules rentrantes pendant dt :

$$dN_+ = j(r,t) \cdot 2\pi r h \cdot dt$$

- Particules sortantes pendant dt :

$$dN_- = j(r+dr,t)\, 2\pi (r+dr) h\, dt$$

$$dN_\phi = dN_+ - dN_- = -dt\, dr\, 2\pi h \frac{\partial}{\partial r}\left(r j(r,t)\right)$$

- Particules créés $dN_\sigma = \sigma(r) \cdot \underbrace{2\pi r\, dr\, h}_{\text{volume de la couronne}}\, dt$

$$dN_{tot} \overset{def}{=} 2\pi h r\, dr\, dt \frac{\partial n}{\partial t}$$

et $dN_{tot} = dN_\phi + dN_\sigma \Rightarrow \dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r j(r)\right) + \sigma$

Or on suppose que j suit la loi de Fick : $\vec{j} = -D\,\overrightarrow{grad}(n) = -D\dfrac{\partial n}{\partial r}\vec{e_r}$

d'où $$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n}{\partial r}\right) + \sigma}$$

2) En régime stationnaire $\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n}{\partial r}\right) = -\sigma_0$

- Pour $r < R_0$ $\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n}{\partial r}\right) = -\frac{r\sigma_0}{D}$

$$n(r) = \frac{-\sigma_0}{4D} r^2 + K_0 \ln(r) + K_1$$

- Pour $r \in]R_0 ; R_1]$ $\quad n(r) = K_2 \ln(r) + K_3$

- Conditions aux limites :

- $n(R_1) = 0 \Rightarrow K_3 = -K_2 \ln(R_1)$
- Pas de divergence en $r=0 \Rightarrow K_0 = 0$
- Continuité de $n(r)$ en $R_0 \Rightarrow \frac{-\sigma_0 R_0^2}{4D} + K_1 = K_2\left[\ln(R_0) - \ln(R_1)\right]$

$$K_1 = K_2 \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right) + \frac{\sigma_0}{4D} R_0^2$$

- Continuité de $\vec{j}$ en $R_0 \Rightarrow \frac{K_2}{R_0} = \frac{-\sigma_0}{2D} R_0$

$$\boxed{K_2 = \frac{-\sigma_0 R_0^2}{2D}} \quad \text{donc} \quad \boxed{K_1 = \frac{\sigma_0 R_0^2}{4D}\left[1 - 2\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)\right]}$$

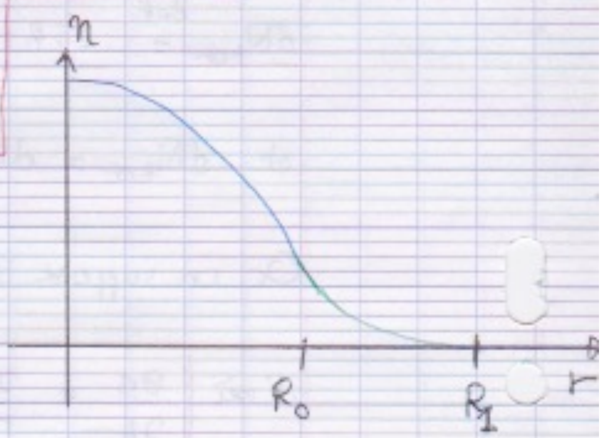
$$\boxed{K_0 = 0} \qquad \boxed{K_3 = \frac{\sigma_0 R_0^2}{2D} \ln(R_1)}$$

$\Rightarrow$ Pour $r \in [0 ; R_0]$

$$n(r) = \sigma_0 \frac{R_0^2}{4D}\left[1 + 2\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right]$$

Pour $r \in [R_0 ; R_1]$

$$n(r) = -\sigma_0 \frac{R_0^2}{2D} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$



$a + bx^2$ — branche de parabole

$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ — Fonction $-\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1}{r}\right)$ nulle en R_1.

3) La quantité de neutrons qui quitte le générateur pendant dt est (par définition du vecteur $\vec{j}$) :

$$dN = 2\pi R_1 h\, \vec{j}(R_1).dt \qquad j(R_1) = \frac{\sigma_0 R_0^2}{2R_1}$$

$$dN = 2\pi R_1 h \frac{\sigma_0 R_0^2}{2R_1} dt$$

$$\boxed{dN = \pi R_0^2 h\, \sigma_0\, dt}$$

= Volume de la zone de création × σ_0 × dt

Le nombre de particules qui quittent le générateur pendant dt = le nombre de particules qui sont créées pendant dt

C'est normal car on est dans le régime stationnaire.

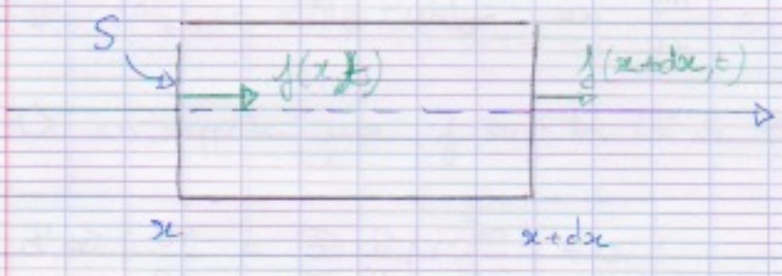
Exercice 2

1) $n_a(x,t) = k\,n(x,t)$ le nombre de particules absorbées est proportionnel au nombre de déchets en mouvement

Si n est trop grand, la terre ne peut plus absorber autant de particules (La capacité totale d'absorption de la terre est finie). Dans ce cas là, on aurait une équation du type $n_a(x,t) = C^{te}$

---

2) Variation totale pendant dt : $dN = \frac{\partial n_t}{\partial t}(x,t)$



Flux de particules (mobiles)

$$dN = \left(-\vec{j}(x,t).\vec{S_1} - \vec{j}(x+dx,t).\vec{S_2}\right) dt$$

$$dN = -\frac{\partial j}{\partial x} dt . S dx$$

$\Rightarrow$ Équation de conservation : $\boxed{\frac{\partial n_t}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$ (1)

⚠ $\vec{j}$ est dû au flux de particules mobiles

donc la loi de Fick donne : $j = -D\frac{\partial n}{\partial x}$

(1) : $\frac{\partial n_t}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$

Or $n_t = n_a + n$ $\Rightarrow \frac{\partial (n_a + n)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial n}{\partial t} + K\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{1+K}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$

On a une équation de diffusion avec un coefficient $D' = \frac{D}{1+K}$

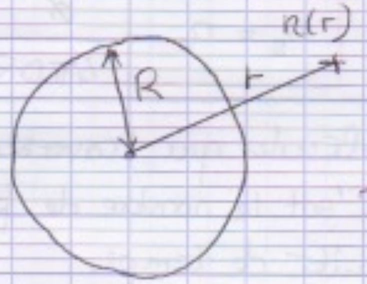
3) Cas Stationnaire : $\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$

$\Rightarrow n(x) = Ax + B$ et $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ n(\ell,t) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{n(x) = n_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$

Exercice 3

$n_0 = n(r=+\infty)$



1) Nombre de moles / unité de temps $= A \times$ masse de la bactérie.

$$\boxed{[A] = M^{-1}\,T^{-1}\,mol.}$$

Par exemple l'unité de A peut être en $mol.\,kg^{-1}.\,s^{-1}$

---

2) Symétrie sphérique + Invariance selon θ et φ $\Big\}$ $\vec{j}(M) = j(r)\vec{e_r}$

Loi de Fick : $\vec{j} = -D\,\vec{\nabla}(n)$

$$\boxed{j(r) = -D\frac{\partial n}{\partial r}}$$

---

3) Par définition de $\vec{j}$:

dN = Nombre de particules entrant dans la sphère de rayon r pendant dt $= \oint\!\!\oint_S \vec{j}.\vec{dS}\,dt = -4\pi r^2 j(r)\,dt$

Signe $\ominus$ car on compte le nombre de particules entrantes

$$\text{Flux} = \frac{dN}{dt} = \boxed{\phi(r) = -4\pi r^2 j(r)}$$

Le régime est stationnaire donc $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ Le nombre de particules dans une coquille d'épaisseur dr est constant

$$dN_{coquille} = 0 = \phi(r+dr) - \phi(r) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

ϕ ne dépend pas de r.

4) $\phi = -4\pi r^2 j(r) = 4\pi r^2 D \frac{\partial n}{\partial r}$

$\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\phi}{4\pi r^2 D} \Rightarrow \left[n \right]_R^{+\infty} = \frac{\phi}{4\pi D^2} \left[\frac{-1}{r} \right]_R^{+\infty}$

$n_0 - n_S = \frac{\phi}{4\pi D^2} \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{n_S = n_0 - \frac{\phi}{4\pi D R}}$

5) ϕ est le nombre de molécules qui traversent la surface $r=R$ par unité de temps. C'est le nombre de particules que la bactérie consomme par unité de temps.

$$\underbrace{\boxed{\phi = A \cdot \frac{4}{3} \rho \pi R^3 \cdot \mathcal{N}_A}}$$

Le nombre de molécules que la bactérie doit manger par unité de temps, si elle fait une taille R.

6) $n_S = n_0 - \frac{\phi}{4\pi D R}$

Plus ϕ est grand, plus la bactérie consomme du O_2, donc plus elle est grosse.

$\phi \nearrow \Rightarrow n_S \searrow \quad n_S(\min) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_{max} = n_0 4\pi D R_{max}}$

$n_0 4\pi D R_{max} = A \frac{4}{3} \pi R_{max}^3 \rho \mathcal{N}_A$

$$\boxed{R_{max} = \sqrt{\frac{3 D n_0}{A \rho \mathcal{N}_A}}}$$

NB : $\left[R_{max} \right] = \left(\frac{L^2 T^{-1} \cdot L^{-3}}{M^{-1} T^{-1} M L^{-3}} \right)^{1/2} = \left(L^2 \right)^{1/2} = L$ Ok!