Feuille de TD n° 10

Résultats asymptotiques-convergence

24 mai 2020

Exercice 1. Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $(O, \overrightarrow{i})$ et $(O, \overrightarrow{j})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp. Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n.
On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère, c'est-à-dire que $M_0 = O$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, A, P).

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, ... , T_n sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de T_n. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ et la variance $\mathrm{V}(T_n)$ de T_n.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2,... , T_n.
   (c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.
   (a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.
   (a) Si n est impair, que vaut p_n ?
   (b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule :
   $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$$
   Etablir la relation :
   $$p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$$
4. Que dire de la série $\sum p_n$? Que peut-on en conclure ? On ne demande pas de preuve !

---

1. (a) On pose H, D, G, B les évènements aller à droite et U_i la variable aléatoire à valeurs dans H,B,D,G avec la probabilité uniforme ; le système $(U_{n-1} = H, D, G, B)$ est complet et les variables U_n et U_{n-1} sont indépendantes :
   $$\mathbb{P}(T_n = 0) = \mathbb{P}(U_n = \{H, B\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = D) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(U_n = G) = \frac{1}{4}.$$
   D'où $\mathbb{E}(T_n) = 0$. Et $\mathrm{V}(T_n) = \frac{1}{2}$.
   (b) On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$
   (c) Par linéarité de l'espèrance : $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(T_n) = 0$ et les variances s'ajoute par orthogonalité :
   $\mathrm{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = \frac{n}{2}$.

2. (a) Non car si $X_n = 1$, alors $Y_n = 0$.
   (b) $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leq \mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2 + Y_n^2) = n^2$.
3. (a) $X_n + Y_n$ est de même parité que n, donc $p_n = 0$.
   (b) On suppose qu'on fait k sauts à droite et donc k sauts à gauche, $m-k$ sauts en haut et $m-k$ sauts en bas, il faut les csir parmi $2m$:

$$\binom{n}{k \quad n-k \quad k \quad n-k} = \frac{(2m)!}{(k!)^2(m-k)!^2} = \binom{2m}{m}\left[\binom{m}{k}\right]^2$$

   D'où le résultat vu que chaque mouvement à une probabilité de $\dfrac{1}{4}$.
   La formule admise se montre facilement, on sépare $[\![1, 2m]\!]$ en deux parties de cardinal m et choisir m éléments parmi $2n$ revient à choisir k éléments dans la première partie et $m-k$ dans la seconde pour k variant dans $[\![1, m]\!]$.
4. La formule de Sterling nous dit que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ et donc

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m\left(\dfrac{m}{e}\right)^n} = 2^{2m}$$

On en déduit que $p_n \sim \dfrac{1}{\pi n}$. La série est divergente, cela signifie que la puce repasse presque sûrement par l'origine !
Si on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k, Y_k)$, alors on va montrer que $\mathbb{P}(\limsup(S_n = O)) = 1$ où $O = (0, 0)$ est l'origine. Ce qui singifie que la puce repasse presque sûrement une infinité de fois par O !
Notons $A = \limsup(S_n = 0)$. Dire que $\mathbb{P}(A) = 1$ équivaut à dire que $\mathbb{P}(B) = 0$ avec $B = A^c.B$ est l'événement : la suite ne passe qu'un nombre fini de fois en 0. On peut partitionner cet événement en fonction de l'instant de dernier passage :

$$\begin{aligned}
B &= \cup_{n=0}^{\infty}\{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k \neq 0\}\\
&= \cup_{n=0}^{\infty}\{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k - S_n \neq 0\}\\
&= \cup_{n=0}^{\infty}\{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, S_n + i - S_n \neq 0\}\\
&= \cup_{n=0}^{\infty}\{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\}
\end{aligned}$$

Comme c'est une partition, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(S_n = 0\right)\mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right)
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $S_n = (X_1, Y_1) + \cdots + (X_n, Y_n)$ ne dépendant que des n premières variables, S_n est indépendante de $(X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i})$.
Mais, la probabilité $\mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right)$ ne dépend pas de n car les suites $\left((X_n, Y_n)\right)_{n>0}$ et $\left((X_n, Y_n)\right)_{n>i}$ sont toutes deux des variables aléatoires indépendantes de même loi. Notons α cette probabilité, $\alpha = \mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) + \cdots + (X_i, Y_i) \neq 0\right)$ Nous avons donc d'une part que la série de terme général $\alpha\mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$ converge (puisque c'est une série à termes positifs dont la limite vaut $\mathbb{P}(B)$). Mais par hypothèse, la série de terme général $\mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$ diverge. Nécessairement, α vaut zéro. Donc $\mathbb{P}(B) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire positive sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que
$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$
2. Montrer que
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$

---

1. Pour tout $n \geq 0$, on a
$$n\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq (n+1)\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}.$$
L'espérance est croissante
$$n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}) \leq (n+1)\mathbb{P}(n \leq X < n+1).$$
et en sommant on obtient dans $\overline{\mathbb{R}}$
$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1)$$
ce qui montre que la somme de gauche est finie ssi l'espérance l'est.
2. Pour tout $n, k \geq 0$, on pose $a_{k,n} = \mathbb{P}(n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}$ où $\mathbb{1}_{k<n}$ vaut 1 si $k < n$ et 0 sinon. En commençant à sommer sur k
$$\sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}((n \leq X < n+1)$$
et en commençant à sommer sur n
$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n>k}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\right) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X \geq k+1)$$
Comme les sommes sont à termes positifs l'une est finie ssi l'autre l'est. Avec la question 1, on obtient l'équivalence.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $\dfrac{X_n}{n}$ tend vers 0 en probabilité, c-à-d
$$\forall \varepsilon, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$
2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors $\mathbb{E}\left(\left|\dfrac{X_n}{n}\right|\right)$ tend vers 0. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n} = 0\right) = 1$.
   Hint : Utiliser l'exercice précédent et le lemme de Borel-Cantelli.

---

1. Les X_n ayant même loi, on a
$$\mathbb{P}(\frac{|X_n|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\frac{|X_1|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\big(|X_1| \geq n\varepsilon\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
2. Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors
$$\mathbb{E}\left(\frac{|X_n|}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_1|}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(|X_n|\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
   La réciproque est claire car la suite existe ssi $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$.
3. On suppose $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. L'exercice précédent montre la série
$$\mathbb{P}(\frac{X_1}{\varepsilon} \geq n)$$
   converge et donc la série de terme générale $\mathbb{P}(\dfrac{X_n}{\varepsilon} \geq n)$ converge et celle de terme générale $\mathbb{P}(\dfrac{X_n}{\varepsilon} < n)$ diverge.
   Rappelons le lemme de Borel-Cantelli
   Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.
   (a) Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, *alors* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$
   (b) Si de plus la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est indépendante, alors
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$
   On en déduit que
$$\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| < n\varepsilon\}) = 1$$
   car les variables sont indépendantes.
   On pose $A_k = \limsup\{|X_n| < \dfrac{n}{k}\}$ qui est une suite décroissante et donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$
   Mais $\bigcap\limits_{k\geq 1} A_k = \{\lim \dfrac{|X_n|}{n} = 0\}$, d'où le résultat.

Exercice 4. Une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle est une fonction telle que
$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$
Lors d'une soirée, n amis ($n \geq 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

1. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.
2. Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ? Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?
3. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de réels positifs tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :
   $$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$
   (b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :
   $$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$
4. On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.
   (a) Vérifier que $\mathbb{E}(X_k^2) = \dfrac{n^2}{2}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^2}\binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   (b) En déduire que
   $$\mathbb{E}(X_k^2) \geq \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$
   On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

---

1. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire à valeur dans $\{0, n\}$.
($S_n = 0$) ssi tous les joueurs perdent. Les variables X_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
$\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. On en déduit
$$\mathbb{E}(S_n) = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$
On en déduit que $\mathbb{E}(X_k) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
2. Le gain moyen augmente avec le nombre de joueurs, donc le joueur à intérêt d'accepter un nouveau joueur.
Par contre, le gain moyen du serveur est $\dfrac{n}{2^n}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{2^x}$ est décroissante pour $x \geq 2$. Donc le serveur a intérêt à refuser le nouvel arrivant.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
   (a) Une récurrence avec utilisation du barycentre partiel donne le résultat (c'est du cours).
   (b) Une application directe du théorème de transfert permet de conclure.
4. Si G_k est l'évènement le joueur k gagne et Y le nombre de gagnants différents de k, on a
$\mathbb{P}(X_k = n/r) = \mathbb{P}(Y = r-1 \cap G_k) \overset{\textit{indépendants}}{=} \mathbb{P}(Y = r-1)\mathbb{P}(G_k) = \dfrac{1}{2} \times \dbinom{n-1}{r-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, car Y suit une loi binomiale de paramètre $n-1$ et $1/2$.
$$\mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{r=1}^{n} \frac{n^2}{r^2}\binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n^2}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(1+r)^2}\binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est convexe et soit U une loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\dfrac{1}{2}$. La question précédente donne

$$\mathbb{E}(U) = \frac{n^2}{2} \times \mathbb{E}(g(U)) \geq \frac{n^2}{2} \times g(\mathbb{E}(U)) = \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{\left((n-1) \times \frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Exercice 5. Montrer que la convergence presque-súre implique la convergence en probabilité.

Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence presque sure de Y_n vers Y signifie que l'événement

$$\Omega' := \left\{\omega \in \Omega; \lim_{n \to +\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}$$

a pour probabilité 1. Définissons

$$\Omega'_\varepsilon := \{\omega \in \Omega; \exists k_0 = k_0(\omega), \forall n \geq k_0, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\}$$

C'est bien un évènement (i.e. $\Omega'_c \in \mathcal{F}$) puisqu'il s'écrit

$$\Omega'_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq k} \{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$

De plus Ω'_ε contient Ω', donc $\mathbf{P}\left(\Omega'_c\right) = 1$. Pour tout $k \geq 1$, notons

$$A_k := \{\omega \in \Omega; \forall n \geq k, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n \geq k} \{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$

La suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est clairement croissante pour l'inclusion et sa réunion est Ω'_ε. Par continuité séquentielle croissante de $\mathbf{P}$, on a donc $\mathbf{P}\left(A_k\right) \uparrow \mathbf{P}\left(\Omega'_\varepsilon\right) = 1 (k \to +\infty)$. Par conséquent,

$$\forall \delta > 0, \exists k_1, \quad P\left(A_{k_1}\right) > 1 - \delta$$

Pour tout $n \geq k_1$, l'évènement $\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$ contient A_{k_1}, d'où

$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

et en passant à l'évènement complémentaire

$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right) < \delta$$

Ceci établit la convergence vers 0 de $\mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right)$. Comme ε était quelconque, on a bien convergence en probabilité de Y_n vers Y