

QUESTIONS COURTES (  $\sim 30\%$  )

1. On s'intéresse à une machine cyclique ditherme. On note  $T_f$  la température de la source froide et  $T_c$  la température de la source chaude.
  - a) Écrire les deux premiers principes de la thermodynamique en faisant intervenir le travail et les chaleurs échangés. Que deviennent ces égalités lorsque l'agent thermique réalise un cycle ?
  - b) Donner la définition de l'efficacité d'un réfrigérateur. On précisera bien les signes des grandeurs en jeu. Déduire de la question précédente la valeur maximale de l'efficacité d'un réfrigérateur.
  - c) Pour un réfrigérateur d'appartement, quelle sont la source chaude et la source froide ? Donner un ordre de grandeur de l'efficacité maximale pour un réfrigérateur d'appartement.
2. On s'intéresse à une évolution quasi-statique d'un gaz parfait.
  - a) Écrire la variation d'entropie  $dS$  comme une somme de deux termes. Que vaut  $dS$  lors d'une évolution adiabatique réversible ?
  - b) Donner la définition des capacités thermiques à volume constant  $C_V$  et à pression constante  $C_P$ . Donner la définition de  $\gamma$ .
  - c) On rappelle que, pour un gaz parfait,  $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$ . Démontrer que, pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, on a la loi de Laplace :  $PV^\gamma = Cste$ .
3. On s'intéresse à la diffusion de particules dans un problème tridimensionnel sans sources de particules.
  - a) Donner l'équation locale de conservation du nombre de particules.
  - b) Citer deux autres exemples en physique où l'on a le même type d'équation de conservation. Donner la signification physique de chaque terme introduit.
  - c) Donner la loi de Fick et en déduire l'équation de diffusion pour les particules. On introduira une constante dont on donnera le nom et l'unité.
4. Donner le diagramme  $(P, T)$  des différents états de l'eau. Placer sur le diagramme la zone du solide, du liquide et du gaz. À l'aide du diagramme, expliquer comment fonctionne le patin à glace (冰刀) en sachant que le coefficient de frottement de l'acier sur l'eau liquide est dix à cent fois plus faible que celui de l'acier sur l'eau solide.

EXERCICE 1 : MACHINE À VAPEUR (  $\sim 30\%$  )

Une machine à vapeur est un moteur ditherme qui utilise les changements d'état de l'eau pour fournir un travail. L'eau dans la machine est successivement en contact avec une chaudière (source chaude de température  $T_2$ ) et une source froide à la température  $T_1$ . Une masse  $m$  d'eau dans la machine effectue la transformation cyclique suivante :

- L'eau est initialement en A sous forme de liquide sur la courbe de saturation. Elle est totalement vaporisée dans la chaudière à la température  $T_2$  jusqu'à atteindre l'état B sur la courbe de saturation.
- La vapeur saturante subit ensuite une détente adiabatique. La vapeur se condense partiellement et la température diminue jusqu'à la température  $T_1$  (état C).
- Le reste de la vapeur est ensuite condensé à la température  $T_1$ . On s'arrête dès que le système est entièrement liquide (état D).

— Dans la chaudière, l'eau est à nouveau chauffée le long de la courbe de saturation jusqu'à la température  $T_2$  (retour à l'état A).

Toutes les phases de la transformation sont supposées réversibles.

1. **Question préliminaire :**

- a) Dans un diagramme  $(P, v)$ , placer la zone correspondant au liquide et la zone correspondant au gaz. Représenter plusieurs isothermes lors du changement d'état (isothermes d'Andrews). Placer sur le schéma la courbe de saturation.
- b) Définir le point critique en quelques mots. Placer le point critique sur le diagramme.
- c) Comment définir la pression de vapeur saturante  $P_S(T)$  sur le schéma précédent ?

2. Sur **un autre** diagramme  $(P, v)$ , représenter la courbe de saturation et le cycle  $ABCD$ A parcouru par l'eau dans la chaudière.

3. **Calculs d'entropie :**

- a) On considère la capacité calorifique massique de l'eau liquide constante égale à  $c$ . Calculer la variation d'entropie entre  $D$  et  $A$
- b) Exprimer la variation d'entropie entre  $A$  et  $B$  en fonction de  $m$ ,  $T_2$  et de la chaleur latente massique de vaporisation  $\ell(T_2)$ .
- c) Quelle est la variation d'entropie pendant la transformation  $B \rightarrow C$  ?
- d) On note  $x$  le titre massique en vapeur au point  $C$ . Calculer  $S_D - S_C$  en fonction de  $x$ ,  $T_1$  et de  $\ell(T_1)$ .
- e) En déduire l'expression de  $x$  en fonction des données du problème.
- f) Faire l'application numérique pour  $x$ .

4. **Évaluation du rendement de la machine thermique :**

- a) Donner les expressions des quantités de chaleur  $Q_{A \rightarrow B}$ ,  $Q_{B \rightarrow C}$ ,  $Q_{C \rightarrow D}$  et  $Q_{D \rightarrow A}$  pendant l'évolution.
- b) En déduire le travail  $W$  reçu par la masse d'eau au cours du cycle.
- c) Exprimer le rendement  $\eta$  de la machine à vapeur en fonction des données du problème. Faire une application numérique et comparer avec le rendement de Carnot pour les mêmes sources de températures.

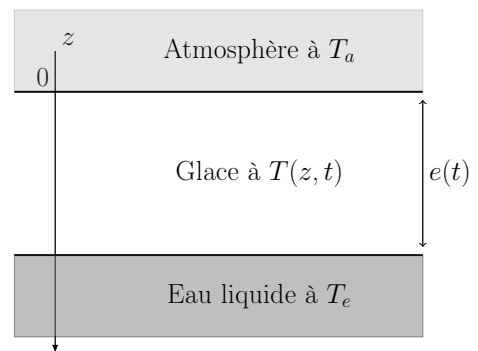
Données :  $m = 1\text{kg}$ ,  $T_2 = 485\text{K}$ ,  $T_1 = 373\text{K}$ ,  $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\ell(T_2) = 1,89.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $\ell(T_1) = 2,26.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

EXERCICE 2 : GEL D'UN LAC (  $\sim 40\%$  )

On cherche dans ce problème à décrire la croissance de l'épaisseur d'une couche de glace d'un lac de surface  $S$ .

On considère le problème unidimensionnel et on le modélise comme sur la figure ci-contre.

- L'atmosphère au dessus du lac a une température  $T_a$ .
- La glace a une épaisseur  $e(t)$  et une température  $T(z, t)$ .
- L'eau liquide sous la glace a une température  $T_e > T_a$ .



Pour toutes les questions de l'exercice, on se place en régime quasi-stationnaire : la température dans la couche de glace ne dépend pas du temps (cependant l'épaisseur de la couche de glace dépend du temps).

On donne les valeurs des constantes et paramètres suivants :

- Masse volumique de la glace :  $\mu = 900 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- Capacité thermique massique de la glace :  $c = 4.18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .
- Conductivité thermique de la glace :  $K = 2.1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .
- Enthalpie massique de fusion de l'eau à  $0^\circ\text{C}$  :  $\ell_f = 330 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- Température de l'eau sous la glace :  $T_e = 273 \text{ K}$ .
- Température de l'air au dessus de la glace  $T_a = 253 \text{ K}$ .

On suppose pour les questions 1, 2 et 3 que l'air impose la température  $T_a$  à la surface du lac.

1. On suppose que la glace est un solide qui vérifie la loi de Fourier, avec un coefficient de conductivité thermique  $K$ .
  - a) En régime stationnaire et en une dimension, que devient l'équation de la chaleur? La résoudre dans ce cas et déterminer  $T(z)$  dans la couche de glace.
  - b) En déduire le flux  $\Phi$  qui traverse la couche de glace dans le sens des  $z$  croissants, à une altitude  $z$ . Commenter son signe. Pourquoi le flux ne dépend pas de  $z$ ?
  - c) Quelle est l'analogie de la tension, de la résistance et du courant électrique dans cette modélisation? Donner la résistance thermique de la couche de glace.
2. On étudie la couche d'eau liquide juste en dessous de la glace, d'épaisseur  $de(t)$ , qui gèle entre  $t$  et  $t + dt$ .
  - a) Que vaut la chaleur reçue par cette tranche d'eau entre  $t$  et  $t + dt$ ?
  - b) Quelle quantité de chaleur faut-il pour solidifier la tranche de fluide d'épaisseur  $de(t)$ ?
  - c) En déduire alors la formule qui donne l'évolution de l'épaisseur de la couche de glace  $e(t)$  :

$$e \frac{de}{dt} = \frac{K(T_e - T_a)}{\mu \ell_F} \quad (1)$$

3. Étude de l'équation 1.
  - a) Résoudre l'équation différentielle 1 en sachant que  $e(t = 0) = e_0$ .
  - b) Quel comportement trouve-t-on pour  $e(t) \gg e_0$ ? Était-ce prévisible?
  - c) Pour une couche d'épaisseur  $e$  donnée, trouver un temps caractéristique de variation de  $e(t)$  à partir de la formule 1. Faire une application numérique pour  $e = 2,1 \text{ cm}$ .
  - d) *Question bonus* : Dans quel cas peut-on considérer que l'on est bien dans un régime quasi-stationnaire pour la couche de glace?
4. En réalité le transfert thermique de la glace vers l'air se fait par un transport conducto-convectif. La température à la surface du lac n'est alors plus égale à la température de l'air.  $T_s(t) = T(z = 0, t)$  et  $T_a$  sont reliés par le flux  $\Phi_c$  à l'interface (orienté dans le sens des  $z$  croissants) :

$$\Phi_c = hS(-T_s(t) + T_a)$$

avec  $h = 50 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  le coefficient de transfert conducto-convectif.

- a) Comment est modifiée l'équation 1?
- b) En écrivant la continuité du flux en  $z = 0$ , établir une autre équation qui relie la température  $T_s$  et l'épaisseur  $e(t)$ .
- c) À partir des deux équations précédentes, déterminer la nouvelle équation différentielle donnant l'épaisseur de glace  $e(t)$ .
- d) En prenant  $e_0 = 0$ , résoudre cette équation et écrire la solution sous la forme :

$$e(t) = L \left( \sqrt{1 + \frac{t}{\tau'}} - 1 \right)$$

Donner le nouveau temps caractéristique  $\tau'$ . Faire l'application numérique. Comparer ce temps au résultat de la question 3c. Était-ce prévisible?