Francais des sciences - Physique 7

Moment cinétique

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

Dans le cas d'une translation d'un point matériel ou d'un solide, l'étude de l'impulsion du système, grâce au principe fondamental de la dynamique, permet la plupart du temps de déterminer le mouvement. Dans le cas d'un système en rotation, la grandeur dynamique la plus adaptée à l'étude du système est le moment cinétique.

1 Vocabulaire

Puissance 功率
Travail 功
Travail élémentaire 元功
Grandeur algébrique 代数量
Moteur 发动机
Resistance 阻力
Conservative 保守的
Energie cinétique 动能
Energie potentielle 势能
Energie mécanique 机械能

Référence 参考
Equilibre 平衡
Stabilité 稳定性
Extremum 极值
Minimum 极小值
Maximum 极大值
Dissipé 耗散
Lié 被束缚的
Libre 自由的

2 Moment cinétique d'un point matériel

2.1 Moment cinétique par rapport à un point

Soit un point matériel $M(m)$ évoluant dans un référentiel $\mathcal{R}$ avec la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}(M/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$. **Le moment cinétique** de M par rapport au point O est :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

Propriétés :

- $\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel car la vitesse en dépend.
- $\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R})$ est normal au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$, sa direction est donnée par la règle de la main droite.
- Si $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}) \parallel \overrightarrow{OM}$ à tout instant alors $\overrightarrow{L_0}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$
- Soit $\overrightarrow{L_B}(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique du point M par rapport au point B. Le moment cinétique de M par rapport à un point A quelconque est relié au moment cinétique par rapport à B par la relation :

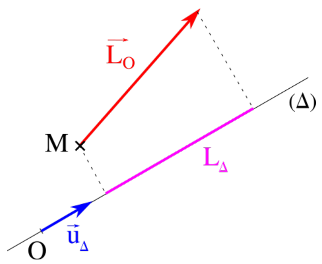
$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L_B}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

✎ Démontrer la relation de **changement d'origine** du moment cinétique.

$$\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge m\overrightarrow{v}$$
$$= \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{v}$$
$$= \overrightarrow{L_B}(M) + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{v}$$

2.2 Moment cinétique par rapport à une axe

Le moment cinétique $L_\Delta(M/\mathcal{R})$ par rapport à l'axe $\Delta(O, \overrightarrow{u_\Delta})$ est la projection de $\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R})$ sur l'axe Δ.



$$\boxed{L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}).\overrightarrow{u_\Delta}}$$

Remarque : Le moment cinétique par rapport à l'axe ne dépend pas du point O à partir duquel $\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R})$ est calculé.

✎ Le démontrer

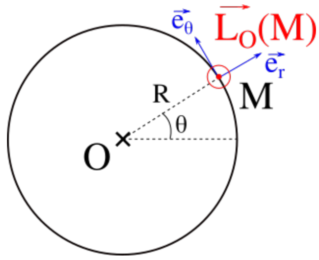
$$\vec{L_A}(M) = \vec{L_O}(M) + \vec{AO} \wedge m\vec{v}$$

Ainsi $\vec{L_A}(M).\vec{u_\Delta} = \vec{L_O}(M).\vec{u_\Delta} + \cancel{(\underbrace{\vec{AO} \wedge m\vec{v}}_{\perp \vec{AO}}).\underbrace{\vec{u_\Delta}}_{// \vec{AO}}}^{0}$

$$\vec{L_A}(M)\vec{u_\Delta} = \vec{L_O}(M).\vec{u_\Delta}$$

2.3 Cas d'un mouvement circulaire

Dans le cas d'un mouvement circulaire $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{v}(M) = R\dot\theta\overrightarrow{e_\theta}$



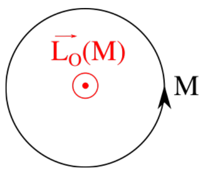
Ainsi

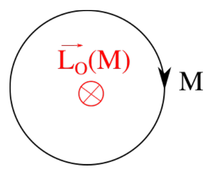
$$\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) = R\overrightarrow{e_r} \wedge mR\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} = mR^2\dot\theta\overrightarrow{e_z}$$

et

$$L_{Oz}(M/\mathcal{R}) = mR\dot\theta$$

Le sens de $\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R})$ et donc le signe de $L_{Oz}(M/\mathcal{R})$ sont données par la règle de la main droite.





2.4 Moment d'inertie

Dans le cas d'un point matériel $M(m)$ en mouvement quelconque décrit en coordonnées cylindrique d'axe (Oz), le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\boxed{L_{Oz}(M) = J_{Oz}(M)\,\dot\theta} \quad \text{avec} \quad J_{Oz}(M) = mr^2$$

$J_{Oz}(M)$ est **le moment d'inertie** de M par rapport à l'axe (Oz) et r la distance à l'axe.

✎ Le démontrer.

$$\left.\begin{aligned} \vec{OM} &= z\vec{e_z} + r\vec{e_r} \\ \vec{v} &= \dot z\vec{e_z} + r\dot\theta\vec{e_\theta} + \dot r\vec{e_r} \end{aligned}\right\} \vec{L_O}(M) = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge m \begin{vmatrix} \dot r \\ r\dot\theta \\ \dot z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} r\dot\theta z \\ \dot r z - r\dot z \\ r^2\dot\theta \end{vmatrix}$$

Ainsi $L_{Oz} = \vec{L_O}(M).\vec{u_z}$

$$L_{Oz} = \underbrace{mr^2}_{J_{Oz}}\dot\theta$$

$$L_{Oz} = J_{Oz}\dot\theta$$

3 Moment cinétique d'un solide

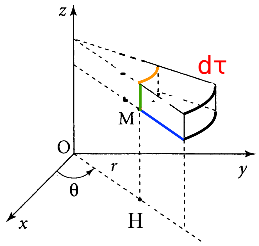
3.1 Caractéristique d'un solide

Définition : Un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

D'après cette définition on ne considérera que les solides indéformables.

Soit $d\tau$ volume élémentaire de masse dm situé en M d'un solide $\mathcal{S}$, son moment cinétique élémentaire par rapport au point O est :

$$d\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\ dm$$



Le moment cinétique d'un solide $\mathcal{S}$ est la somme des moments cinétiques de chaque point.

$$\overrightarrow{L_O}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \iiint_{M\in\mathcal{S}} d\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) = \iiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\ dm$$

3.2 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe si tous les points du solide ont même vitesse angulaire par rapport à cet axe.

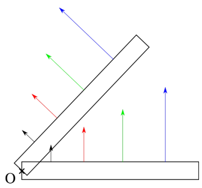


Figure 1 – Solide en rotation

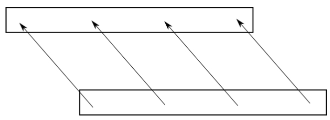


Figure 2 – Solide en translation

Soit un solide indéformable en rotation à la vitesse angulaire autour de l'axe (Oz), on a alors :

$$\boxed{L_{Oz}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = J_{Oz,\mathcal{S}}\ \dot\theta} \quad \text{avec} \quad \boxed{J_{Oz,\mathcal{S}} = \iiint_{M\in\mathcal{S}} r^2 dm}$$

$J_{Oz,\mathcal{S}}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

✎ Le démontrer

$$L_{Oz} = \iiint_{M\in S} dL_{Oz}(M) = \iiint_{M\in S} (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e_z} \cdot dm(M) = \iiint_{M\in S} r^2 \dot\theta\, dm(M)$$

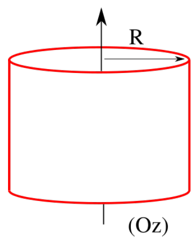
Or $\dot\theta$ est le même pour tous les points M donc

$$L_{Oz} = \dot\theta \iiint_{M\in S} r^2\, dm(M)$$

3.3 Moments d'inertie usuels

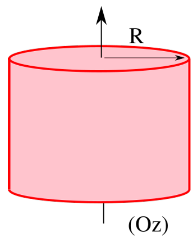
Lorsque que la répartition des masses est uniforme (solide homogène), le moment d'inertie est uniquement lié à la géométrie.

Cylindre creux



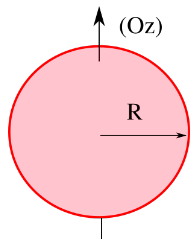
$J_{Oz} = mR^2$

Cylindre plein



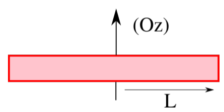
$J_{Oz} = \frac{1}{2}mR^2$

Boule



$J_{Oz} = \frac{2}{5}mR^2$

Barre



$J_{Oz} = \frac{1}{12}mL^2$

Propriété : Plus une masse est éloignée de l'axe par rapport auquel on calcule le moment d'inertie, celle-ci y contribue.

Exemples :

- J(cylindre creux) < J(cylindre plein)
- Bras d'un patineur (cf vidéo du tabouret d'inertie)

4 Moment d'une force

Les forces mettant en rotation un système mécanique font varier son moment cinétique. On mesure l'effet d'une force sur le moment cinétique grâce à son moment.

4.1 Définition

4.1.1 Moment par rapport à un point

Soit $M(m)$ un point matériel soumis à une force $\overrightarrow{F}$. Le moment en O de la force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant sur M est :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}}$$

Propriété :

- Le moment de force est une grandeur additive

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2) &= \overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2)\\ &= \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}_2\\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_1)+\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_2)\end{aligned}$$

- On peut changer simplement l'origine par rapport à laquelle le moment est calculé

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F}+\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\overrightarrow{F})$$

4.1.2 Moment par rapport à un axe

Il s'agit de la projection sur l'axe Δ du moment de la force :

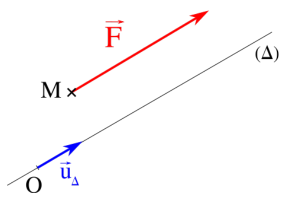
$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u_\Delta} = (\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u_\Delta}}$$

Propriété :

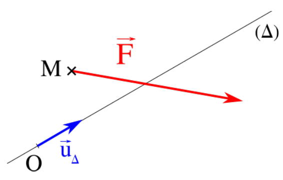
- Comme pour le moment cinétique le moment d'une force par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe où on le calcule.

$$\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u_\Delta}$$

- Si $\overrightarrow{F}\parallel\overrightarrow{u_\Delta}$ alors $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})=0$

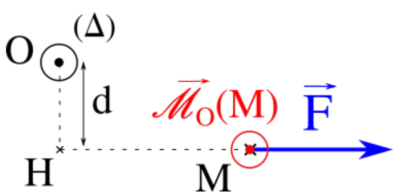


- Si la direction de $\overrightarrow{F}$ passe par l'axe (Δ) alors $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})=0$



4.2 Notion de bras de levier

Considérons un point matériel $M(m)$ soumis à une force $\overrightarrow{F}$ et un axe passant par O perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{F})$



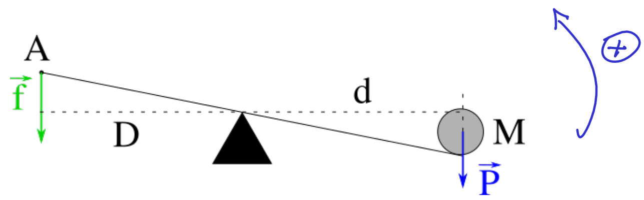
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$\left|\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})\right| = \left|\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u_\Delta}\right| = d||\overrightarrow{F}||$$

d est appelé **le bras de levier**, c'est la distance entre la direction de la force et l'axe Δ.

On a de plus $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \begin{cases} +d||\overrightarrow{F}|| & \text{si la force fait tourner le système dans le sens trigo} \\ -d||\overrightarrow{F}|| & \text{si la force fait tourner le système dans le sens horaire} \end{cases}$

Application : Equilibre d'une balance



✎ Exprimer les moments projetés sur l'axe de rotation des force $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{P}$. En déduire la norme de la force à fournir pour lever le caillou M

Bras de levier de $\vec{f}$: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = +fD$

Bras de levier de $\vec{P}$: $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -Pd = -mgd$

Pour soulever le caillou il faut $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})| > |\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})|$

$f > mg\frac{d}{D}$

5 Lois du moment cinétique. Energétique des solide

5.1 Théorème du moment cinétique (TMC) pour un point matériel

5.1.1 TMC en un point O

Soit un point matériel $M(m)$ de moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})$ soumis à une force $\overrightarrow{F}$ de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})$ par rapport à un point O, dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L}_O(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})}$$

✎ Démontrer le théorème du moment cinétique.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L_o}(M)\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge m\vec{v}\right) = \overset{0}{\cancel{\underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{OM})}_{\vec{v}} \wedge m\vec{v}}} + \vec{OM} \wedge \overbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}^{\vec{F}}$$

$= \vec{OM} \wedge \vec{F}$ d'après le PFD

$= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$

Remarque : Lorsque le système est soumis des forces de moment nul alors son énergie cinétique se conserve.

5.1.2 TMC par rapport à un axe fixe

La projection du théorème du moment cinétique sur un axe fixe $(O, \overrightarrow{u_\Delta})$ donne :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})}$$

5.2 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

On considère un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe orienté (Oz) fixe, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On ne sintéressera donc ici qu'à la rotation à 1 degré de liberté d'un solide.

On note $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz).
Il est soumis à des forces de résultante $\overrightarrow{F}$.

5.2.1 TMC projeté pour un solide

Comme pour un point matériel la théorème du moment cinétique projeté sur un axe (Δ) de rotation s'écrit :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})}$$

Pour un solide indéformable tournant autour de l'axe (Δ) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ on peut écrire : $L_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = J_{(\Delta)}\dot{\theta}$.

$J_{(\Delta)}$ étant constant le TMC s'écrit :

$$\boxed{J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})}$$

Remarque : Cette expression ressemble fortement à l'expression du PFD dans le cas d'un mouvement rectiligne :

$$m\ddot{x} = F_x$$

Le moment d'inertie caractérise la résistance du solide à une modification de sa vitesse de rotation.

5.2.2 Applications

• <u>Conservation</u>

Lorsque le moment de la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ par rapport à (Δ) est nul, L_Δ se conserve.

— Si J_Δ est constant, alors $\dot{\theta}$ est constant
— Si J_Δ est augmente, alors $\dot{\theta}$ est diminue
— Si J_Δ est diminue, alors $\dot{\theta}$ est augmente

✎ Regarder la vidéo du tabouret d'inertie pour observer les effets du changement de J_Δ

• <u>Variation</u>

Considérons un solide soumis à un couple Γ par rapport à (Oz)

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \Gamma$$

Lorsque $\dot{\theta}$ est positif (sens direct) :

— Si $\Gamma > 0$ (sens direct) alors $\ddot{\theta} > 0$ et $\dot{\theta}$ augmente, Γ est un couple moteur.

— Si $\Gamma < 0$ (sens indirect) alors $\ddot{\theta} < 0$ et $\dot{\theta}$ diminue, Γ est un couple résistant.

Si Γ et $\dot{\theta}$ sont de même signe on parle de couple moteur sinon on parle de freinage.

5.3 Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

5.3.1 Définition

On se place dans un système de coordonnées cylindriques et on étudie un cylindre en rotation autour de l'axe (Oz)

Tous les points du solide on la même vitesse angulaire de rotation donc, un petit élément du solide de masse dm possède une énergie cinétique élémentaire :

$$dE_c = \frac{1}{2}\,dm\;v^2 = \frac{1}{2}\,dm\;(r\dot{\theta})^2$$

L'énergie cinétique du solide est alors :

$$E_c(\mathcal{S}) = \int_V dE_c = \int_V \frac{1}{2}dm(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\left(\int_V r^2 dm\right)\dot{\theta}^2$$

On reconnait le moment d'inertie $J_{Oz} = \int_V r^2 dm$, et finalement :

$$\boxed{E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2}$$

Remarque : Là encore on peut voir une similitude avec l'expression du l'énergie cinétique pour un mouvement rectiligne $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

5.3.2 Puissance d'une force

En coordonnées cylindrique et dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe, la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ de moment par rapport à l'axe de rotation $\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F})$:

$$\boxed{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F})\;\dot{\theta}}$$

✎ Le démontrer.

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

$d\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$

$= \begin{vmatrix} -z\,dF_\theta \\ z\,dF_r - r\,dF_z \\ r\,dF_\theta \end{vmatrix}$

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = \iiint_{M\in S} d\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\cdot\vec{e_z} = \iiint r\,dF_\theta = \iiint r\,d\vec{F}\cdot\vec{e_\theta}$

Ainsi $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})\,\dot{\theta} = \iiint r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\,d\vec{F} = \iiint \vec{v}\cdot d\vec{F} = \iiint d\mathcal{P}$

$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})\,\dot{\theta}$

5.3.3 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide $(\mathcal{S})$ en mouvement de rotation autour d'un axe (Oz) fixe dans un référentiel galiléen, soumis à des forces de résultante $\overrightarrow{F}$:

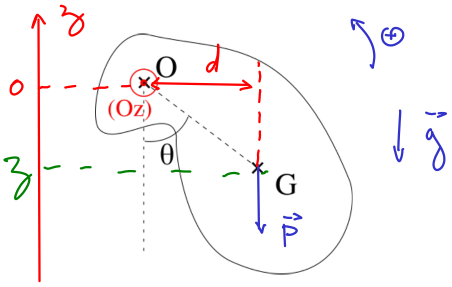
$$\boxed{\frac{dE_c(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F})}$$

✎ Le démontrer.

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_{Oz}\dot{\theta}^2\right) = J_{Oz}\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{dL_{Oz}}{dt}\dot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta} = \mathcal{P}(\vec{F})$$

6 Le pendule pesant

On considère un solide de forme quelconque, de masse m et de centre de gravité G. Ce solide peut tourner sans frottement autour de l'axe (Oz) où $O \neq G$ et on note $OG = l$.
Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz) est noté J_{Oz}.



✎ Effectuer un bilan des forces qui s'appliquent au pendule et déterminer leur moment par rapport à (Oz)

Seul le poids s'applique en G.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mgd$$

$$= -mgl\sin\theta$$

✎ Appliquer le théorème du moment cinétique projeté pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par le pendule pesant.

$L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$ donc $\dfrac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) \Rightarrow J_{Oz}\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$

✎ Dans le cas des petites oscillation ($\theta \ll 1$) résoudre cette équation différentielle.

Pour $\theta \ll 1$ on a $\sin\theta \simeq \theta$ donc $\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_{Oz}}\theta = 0$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_{Oz}}}$, l'équation s'écrit alors : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

De plus $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ donc $\theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t$

✎ Dans le cas général, utiliser le théorème de l'énergie mécanique afin d'obtenir l'intégrale première du mouvement (IPM)

Le poids est conservatif donc l'énergie mécanique se conserve

$$\Delta E_m = 0 = E_m(t) - E_m(0)$$
$$= E_p(t) + E_c(t) - (E_p(0) + E_c(0))$$
$$= (mgz + C) + \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 - ((mgz_0 + C) + 0)$$

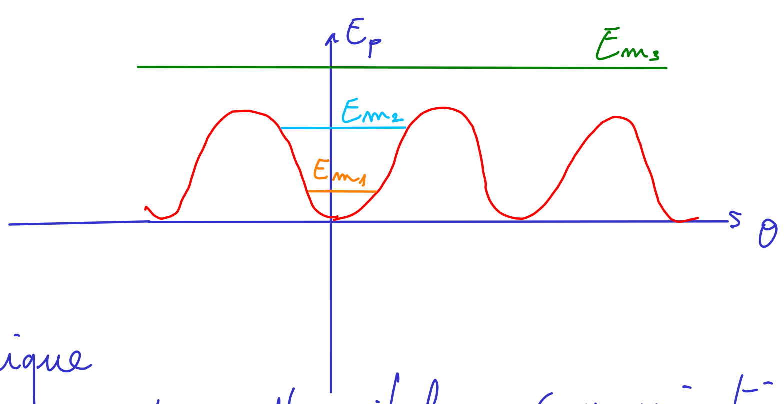
Or $z = -l\cos\theta$ donc $mgl(-\cos\theta + \cos\theta_0) + \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 = 0$

✎ Tracer $E_p(\theta)$ et en déduire les mouvements possibles du pendule en fonction de la valeur de l'énergie mécanique E_m

$E_p = C - mgl\cos\theta$

Avec $E_p(0) = 0$ on a $C = mgl$

Puis $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$



- E_{m_1} : Mouvement harmonique
  ↳ Oscillations autour d'une position d'équilibre (approximation harmonique)

LIÉ

- E_{m_2} : Oscillations avec θ assez grand → non harmonique
- E_{m_3} : Rotation libre autour de O

LIBRE