
TRAVAUX DIRIGÉS DE FRANÇAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 7 :

Moment cinétique

École Centrale Pékin

Année 1

APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 : Jeu polaire

Un esquimau est assis au sommet de son igloo que l'on supposera assimilable à une demi-sphère de centre O et de rayon a . À l'instant $t = 0$, une rafale de vent le décale légèrement du sommet. Étudier son mouvement en appliquant :

1. le principe fondamental de la dynamique,
2. le théorème du moment cinétique,
3. le théorème de l'énergie cinétique.

On justifiera l'utilisation des méthodes et leur(s) éventuel(s) inconvénient(s) dans la résolution du problème.

S'ENTRAÎNER

EXERCICE 2 : Particule évoluant dans un cône

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans un cône d'axe (Oz) vertical et de demi-angle au sommet α .

À l'instant initial, il est lancé à l'altitude z_0 avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$.

1. Pourquoi le point M contourne-t-il l'axe (Oz) en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône ?
2. En exprimant deux constantes du mouvement, justifier l'évolution du point entre deux altitudes extrêmes.
3. La trajectoire peut-elle être circulaire ?

EXERCICE 3 : Pendule conique

Un point matériel M (masse m) est suspendu à un fil inextensible (de masse négligeable, de longueur L) attaché en un point O_1 fixe d'un axe (Oz) . Le point matériel M est astreint à tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω constante, dans le référentiel galiléen d'étude.

1. Exprimer le moment cinétique \vec{L}_{O_1} , calculé en O_1 , du point M , en utilisant la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ avec $R = L \sin \alpha$.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 , et en déduire l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de L , ω et du champ de pesanteur g .

EXERCICE 4 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui O sur le sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas, et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = \frac{1}{3}mL^2$.

- Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
- Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

- En réécrivant cette relation sous la forme $\sqrt{\frac{3g}{L}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$, déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

On donne l'intégrale suivante, pour $\theta_0 = 5^\circ$:

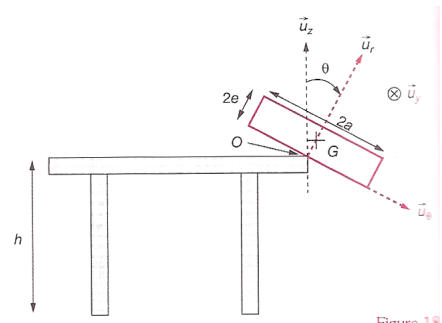
$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1.$$

EXERCICE 5 : La physique de la tartine beurrée

Pourquoi les tartines beurrées tombent-elles toujours du côté du beurre (ou pire, du côté confiture, qui est en général le même que celui du beurre d'ailleurs) ?

On imagine une tartine homogène (longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2e$ et masse m) posée sur une table. Par un geste caractéristique de la maladresse matinale, la tartine est poussée lentement vers le bord de la table. Quand le milieu de la tartine atteint le bord O , la tartine amorce une rotation autour de l'arête horizontale (Oy) .

On note θ l'angle entre la tartine et l'horizontale (voir figure ci-contre avec la tartine géante pour mieux comprendre).



On donne également le moment d'inertie de la tartine selon (Oy) : $J_{(Oy)} = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2)$.

- À l'aide d'une approche énergétique, exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de θ , ainsi que $\dot{\theta}$ en fonction de θ .
- Retrouver l'expression de $\ddot{\theta}$ en fonction de θ à l'aide d'un théorème de dynamique.
- La tartine se met à glisser pour un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. À partir de cet instant, pris comme origine des temps, la tartine quitte la table en un temps très bref (pas la peine d'essayer de la rattraper, le mal est fait) en conservant la même orientation θ_0 initiale et la même vitesse angulaire. Quelle est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de $z_G(t)$, où G est le barycentre de la tartine, en supposant que celle-ci ne retouche plus la table ?
- Déterminer le temps τ pour lequel la tartine touche le sol. On considèrera que la hauteur h de la table est très supérieure aux dimensions de la tartine et que la vitesse initiale de la tartine est très faible devant sa vitesse finale.
- On admet que pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constante, égale à ω_0 . Quelle est son expression ? En déduire $\theta(\tau)$. Faire l'application numérique pour $h = 70 \text{ cm}$.
- De quel côté tombe la tartine ?
- Et si un astronaute maladroit faisait tomber sa tartine depuis sa table de pique-nique sur la lune ? Le problème est-il le même ?

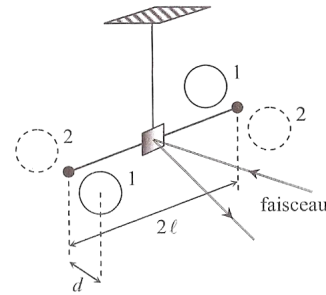
POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 6 : Mesure de la constante de gravitation par Cavendish

Le physicien britannique Henry Cavendish a réalisé en 1798 une expérience destinée à "peser la Terre". Il s'agissait plus exactement de déterminer la constante de gravitation universelle \mathcal{G} , apparaissant dans l'expression de la force de gravitation, dont on peut déduire ensuite la masse M_T de la Terre en connaissant la valeur du champ de pesanteur terrestre g .

L'expérience utilise un pendule de torsion, consistant en un fléau (tige rigide horizontale de longueur $\ell = 20 \text{ cm}$, de masse négligeable) suspendu à un fil vertical. Celui-ci, lorsqu'il est tordu d'un angle θ , exerce sur le fléau un couple de torsion dont le moment par rapport à l'axe confondu avec le fil vaut $\vec{M}_{\text{torsion}} = -C\theta$, avec $C = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ N.m.rad}^{-1}$.

À chaque extrémité du fléau sont placées deux petites sphères de même masse $m = 50 \text{ g}$. On approche de chacune d'elle une sphère beaucoup plus grosse, de masse $M = 30 \text{ kg}$, la distance entre le centre d'une grosse sphère et celui de la petite sphère la plus proche étant $d = 15 \text{ cm}$.



Pour chaque grosse sphère, on ne tiendra compte que de son action sur la petite sphère la plus proche. Lorsqu'on fait passer, par un dispositif opératoire non représenté ici, les deux grosses sphères de la position 1 à la position 2, le fléau tourne d'un angle $2\theta_0$. La mesure angulaire est réalisée par un miroir fixé sur le fléau et déviant un faisceau lumineux (méthode de Pogendorff).

1. La norme de la force attractive de gravitation s'exerçant entre deux sphères de masses m_1 et m_2 , dont les centres sont séparés d'une distance r est donnée par $F_g = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}$.

Que devient cette expression si une des sphères est la Terre (de rayon $R_T = 6400 \text{ km}$ et de masse M_T) et l'autre une masse m quelconque au voisinage de la surface de la Terre? En déduire l'expression de la norme du champ de pesanteur g en fonction de \mathcal{G} , R_T et M_T .

2. L'angle de torsion mesuré dans l'expérience de Cavendish vaut $2\theta_0 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Cet angle étant très faible, on peut considérer que les droites joignant les centres des sphères voisines sont orthogonales au fléau.

Déterminer la valeur de la constante de gravitation \mathcal{G} .

3. En déduire la masse de la Terre.