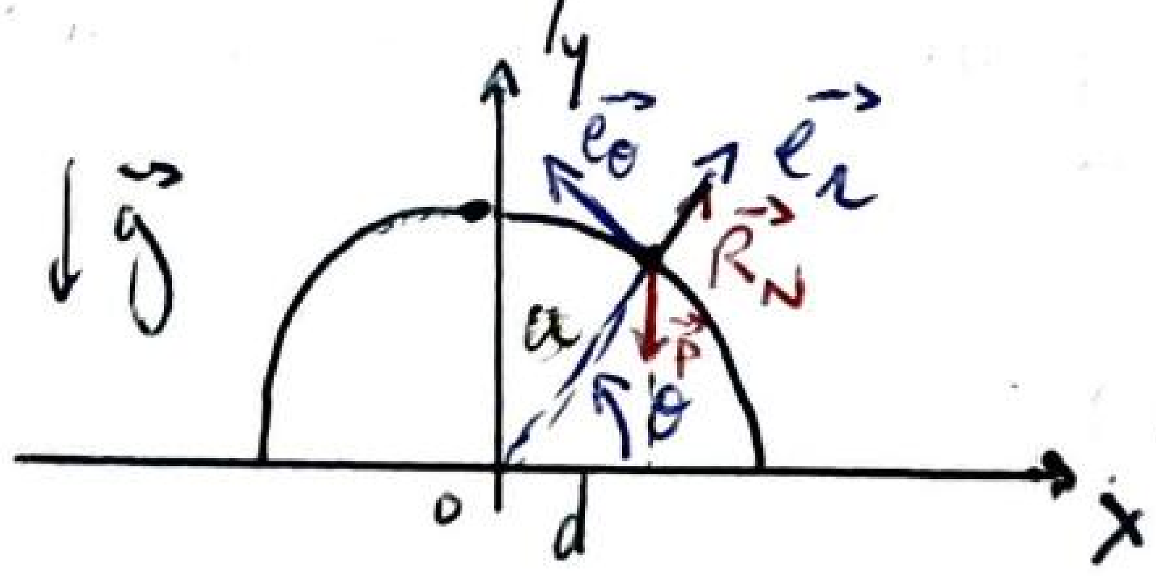
FdS

TD8 - Correction

Ex 1 : Jeu polaire



1) $\vec{OM} = a\vec{e_r}$

$\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e_r} + a\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$d\vec{OM} = a\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

Bilan des forces : • $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\sin\theta\,\vec{e_r} - mg\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = -mgd\vec{e_z} = -mga\cos\theta\,\vec{e_z}$

$\delta W(\vec{P}) = m\vec{g}\cdot d\vec{OM} = -mga\cos\theta\,d\theta = -dE_p$

$E_p(\theta) = mga\sin\theta + C_1$

• $\vec{R_N} = R_N\vec{e_r}$ (pas de frottement)

$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R_N}) = \vec{0}$

$\delta W(\vec{R_N}) = \vec{0}$

1) PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}$

On projette sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$: $\begin{cases} /\vec{e_r} & -ma\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + R_N \\ /\vec{e_\theta} & ma\ddot{\theta} = -mg\cos\theta \end{cases}$

Afin de déterminer l'expression de R_N il faut trouver $\dot{\theta}$. On intègre l'équation projetée sur $\vec{e}_\theta$ après multiplication par $\dot{\theta}$:

$$ma\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\dot{\theta}\cos\theta \rightarrow \frac{1}{2}ma(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = -mg(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

On a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta}_0 = 0$ donc $\frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 = -mg(\sin\theta - 1)$

Ainsi $ma\dot{\theta}^2 = -2mg(\sin\theta - 1)$.

donc avec le PFD projeté sur $\vec{e}_r$ on obtient :

$$2mg(\sin\theta - 1) = -mg\sin\theta + R_N$$

$$\boxed{R_N = mg(3\sin\theta - 2)}$$

Ainsi $R_N = 0$ si $\boxed{\theta_c = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{3}}$

L'esquimau glisse sur l'igloo jusqu'à $\theta = \theta_c$ puis tombe en chute libre.

2) TMC : $\dfrac{d\vec{L_o}}{dt} = \mathcal{M}_o(\vec{P}) + \mathcal{M}_o(\vec{R_N})$

$\vec{L_o} = m a^2 \dot{\theta}\, \vec{e_3}$ donc $\dfrac{d\vec{L_o}}{dt} = m a^2 \ddot{\theta}\, \vec{e_3}$

Ainsi en projetant sur $\vec{e_3}$: $\boxed{m a^2 \ddot{\theta} = - m g a \cos\theta}$

On retrouve l'équation du mouvement mais pas la condition de rupture.

3) TEC : $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P})$

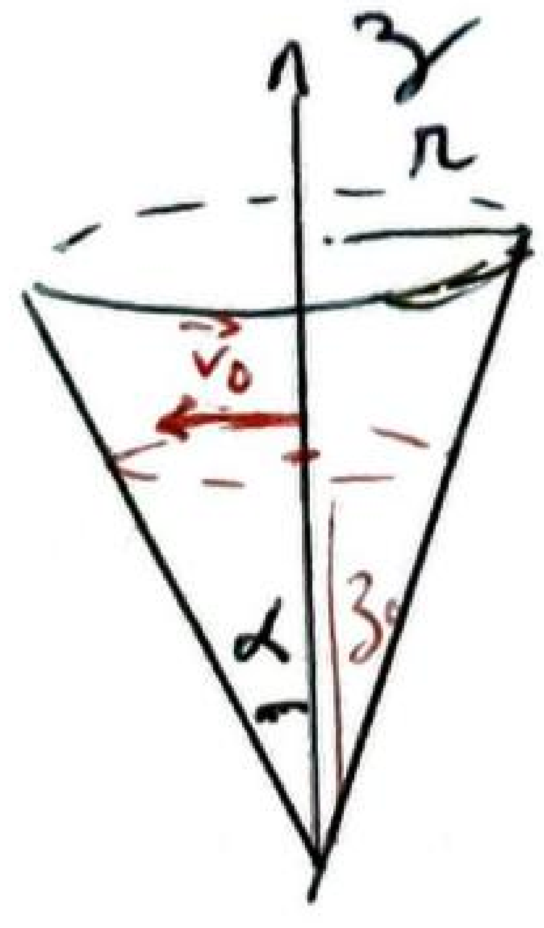
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m (a\dot{\theta})^2\right) = - m g \cos\theta \, a \dot{\theta}$$

Ainsi $m a^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} = - m g a \dot{\theta} \cos\theta$

Puis $\boxed{m a^2 \ddot{\theta} = - m g a \cos\theta}$

même commentaire

Ex 2 : Particule évoluant dans un cône



1) La bille est soumise à 2 forces

$\vec{P} = m\vec{g} \rightarrow \vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \vec{0}$

$\vec{R_N} \perp$ (surface du cône) $\rightarrow \vec{\mathcal{M}}(\vec{R_N}) = \vec{0}$

D'après le TMC : $\frac{dL_{oz}}{dt} = \mathcal{M}_{oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{oz}(\vec{R_N}) = 0$

Ainsi $\boxed{L_{oz} = cst}$

Or $L_{oz} = \vec{L_o} \cdot \vec{e_z} = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e_z}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z} \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + \dot{z}\vec{e_z} + r\dot{\theta}e_\theta \end{array}\right\} \vec{L_o} = \left| \begin{array}{l} -mrz\dot{\theta} \\ m(z\dot{r} - r\dot{z}) \\ mr^2\dot{\theta} \end{array}\right.$$

Ainsi $\boxed{L_{oz} = mr^2\dot{\theta} = cst}$

Comme $m > 0$ et $r^2 > 0$ on a $\dot{\theta}$ qui garde toujours le même signe

De plus $L_{oz}(0) = mr_0^2\dot{\theta}(0) = mr_0v_0 = mz_0\tan\alpha\, v_0 \neq 0$

Comme $L_{oz}(0) \neq 0$ et reste une constante on ne peut pas avoir $r = 0$.

2) $L_{oz} = mz_0\tan\alpha\, v_0$ est une constante du mouvement
$= mr^2\dot{\theta}$

De plus $\boxed{E_m = E_{m_0}}$ car aucune force n'est dissipative l'énergie mécanique est une autre constante.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$$

Or $r = z \tan\alpha$

$\dot{r} = \dot{z} \tan\alpha$

$r\dot{\theta} = \dfrac{L_{Oz}}{mr} = \dfrac{L_{Oz}}{mz\tan\alpha}$

Donc $E_m = \dfrac{1}{2} m \left((\dot{z}\tan\alpha)^2 + \left(\dfrac{L_{Oz}}{mz\tan\alpha}\right)^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 (1 + \tan^2\alpha) + \frac{L_{Oz}^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

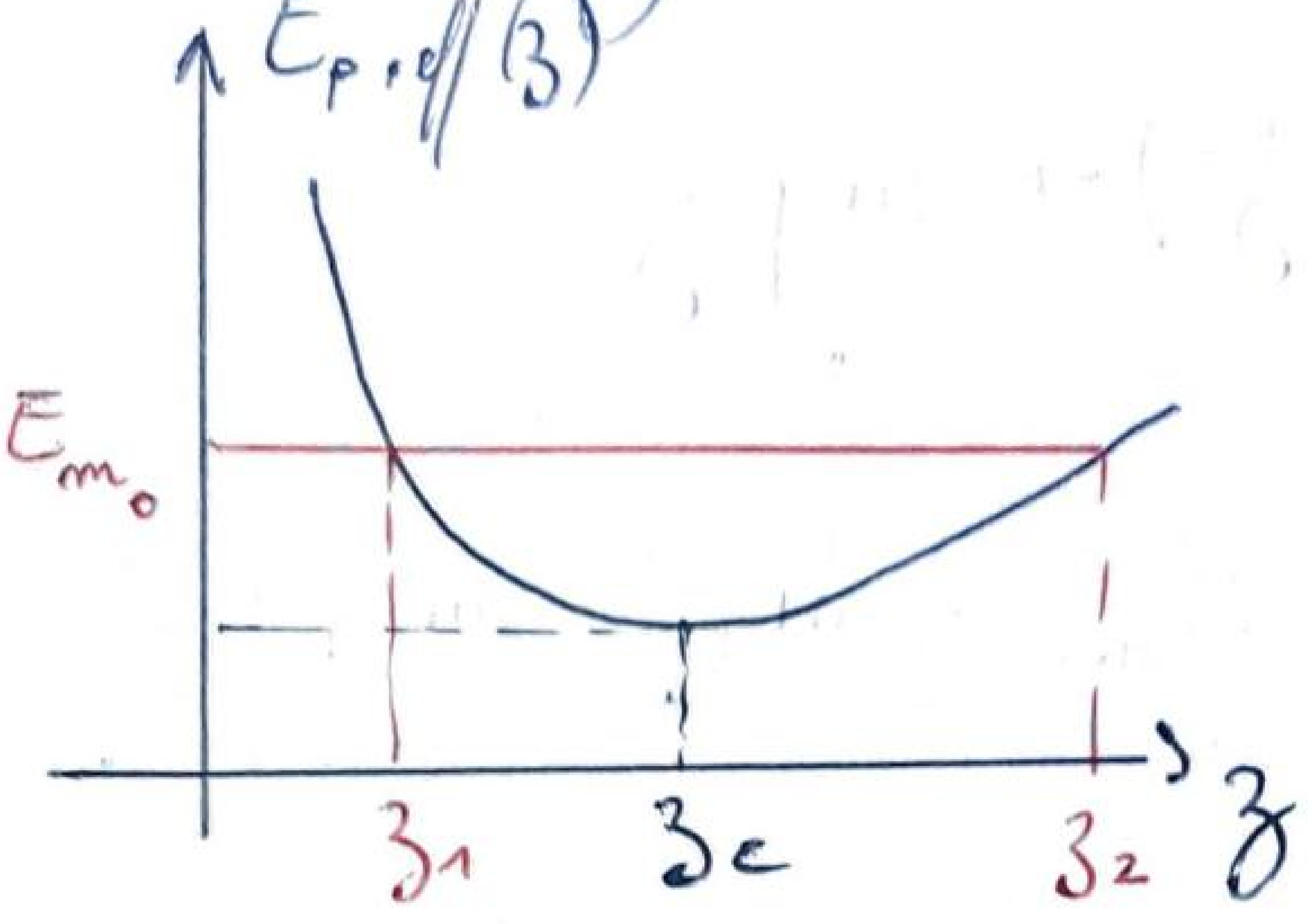
$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{z}}{\cos\alpha}\right)^2 + \frac{L_{Oz}^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

On pose $\dfrac{L_{Oz}^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz = E_{p,eff}$

Ainsi $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2} m \left(\dfrac{\dot{z}}{\cos\alpha}\right)^2 + E_{p,eff}}$

Donc $E_{p,eff} \leqslant E_m$ $\quad \left(\text{car } \dfrac{1}{2} m \left(\dfrac{\dot{z}}{\cos\alpha}\right)^2 > 0 \right)$

l'étude de la fonction $E_{p,eff}(z)$ donne la courbe :

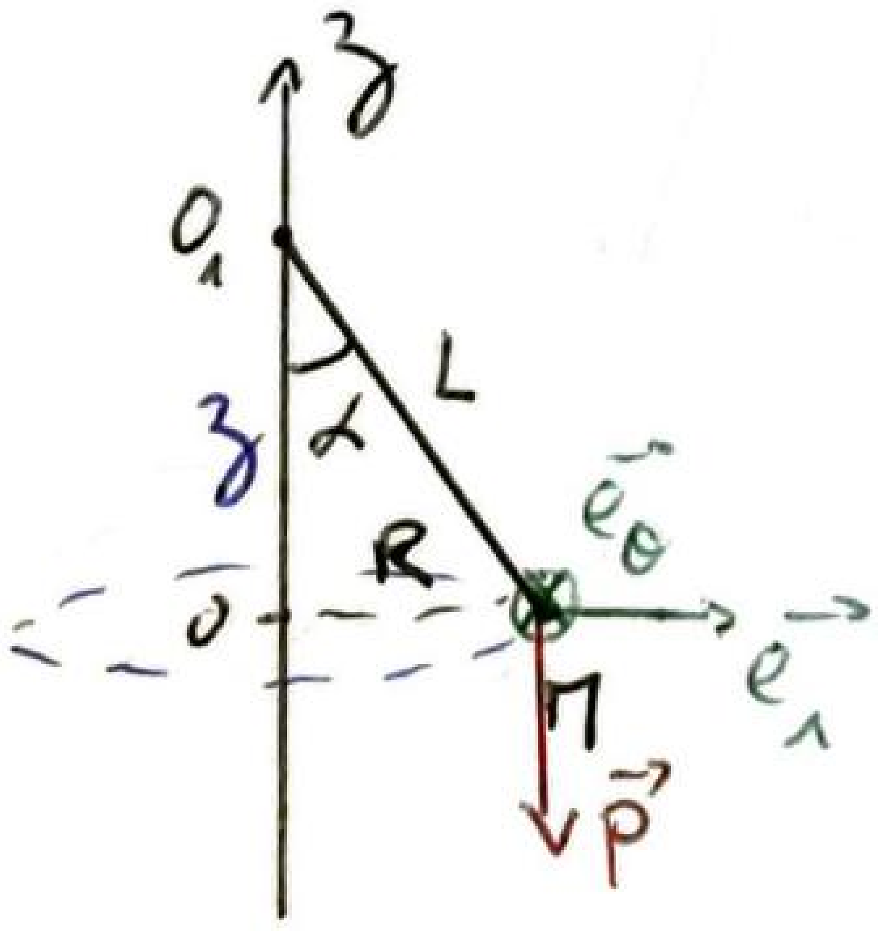


l'altitude de la bille varie entre z_1 et z_2

3) pour $z = z_1 = z_2 = z_c$

c'est à dire $E_{m_0} = \min(E_{p,eff})$ alors z_c est la seule altitude possible donc la trajectoire est circulaire de rayon $\boxed{r_c = z_c \tan\alpha}$

Ex 3 : Pendule conique



1) $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$

et $\vec{OM} = R\vec{e_r}$

donc $\vec{O_1M} = R\vec{e_r} - z\vec{e_z}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\omega\vec{e_\theta}$

Ainsi $\vec{L}_{O_1}(M) = \vec{O_1M} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} mRz\omega \\ 0 \\ mR^2\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mRL\cos\alpha \\ 0 \\ mR^2\omega \end{vmatrix}$

2) Les 2 forces qui s'appliquent sont :

- $\vec{P} = m\vec{g} \rightarrow \mathcal{M}_{O_1}(\vec{P}) = \vec{O_1 M} \wedge m\vec{g} = mgR\,\vec{e_\theta}$
- $\vec{T} \rightarrow \mathcal{M}_{O_1}(\vec{T}) = 0$ (car $\vec{T}$ passe par l'axe de rotation)

On applique alors le TMC au point matériel :

$$\frac{d\vec{L_{O_1}}}{dt} = \mathcal{M}_{O_1}(\vec{P})$$

$$\frac{d\vec{L_{O_1}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mRL\cos\alpha\,\vec{e_r} + mR^2\omega\,\vec{e_z}\right)$$

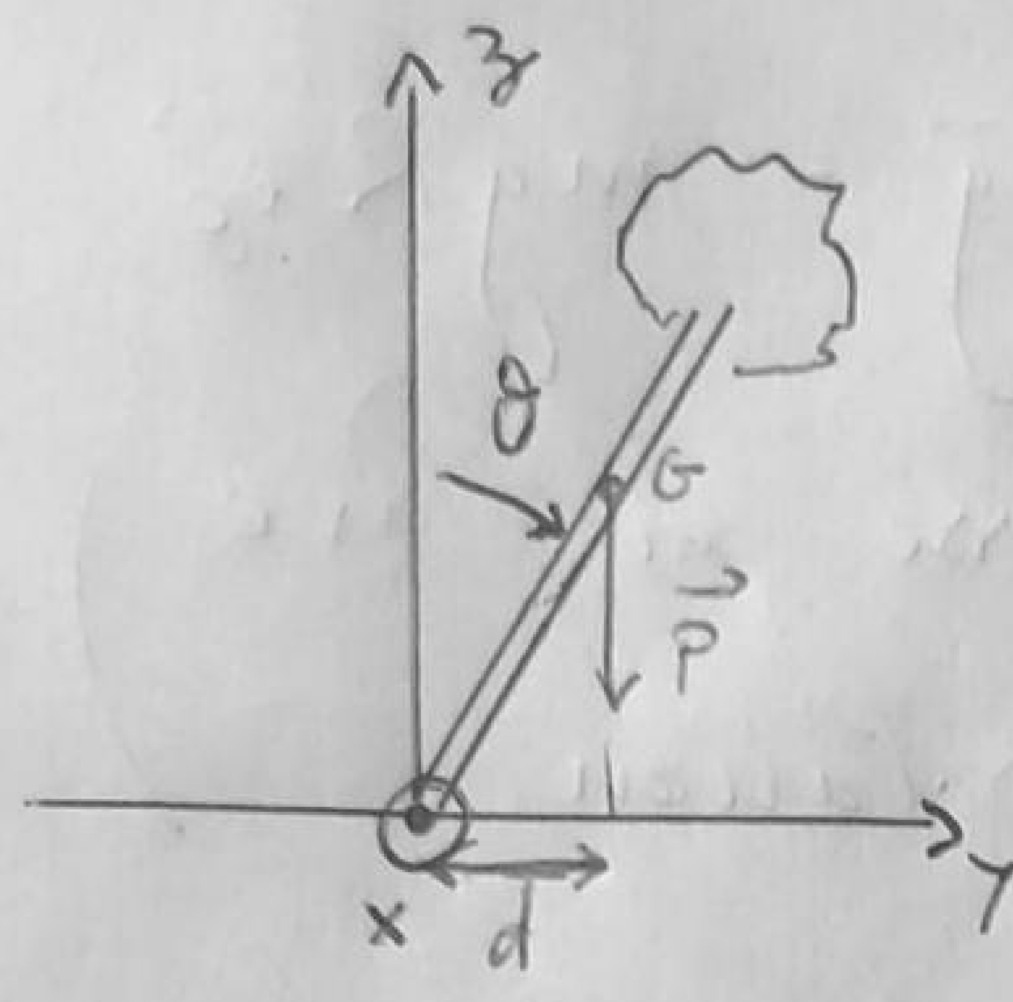
$$= mR\omega L\cos\alpha\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$= +mR\omega^2 L\cos\alpha\,\vec{e_\theta}$$

En projetant sur $\vec{e_\theta}$ il vient $+mR\omega^2 L\cos\alpha = mgR$

Ainsi $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{g}{L\omega^2}}$

Ex 4 : chute d'un arbre



1) D'après le TMC projeté sur l'axe $\vec{e_x}$:

$$\frac{dL_{ox}}{dt} = \mathcal{M}_{ox}(\vec{P})$$

Or $L_{ox} = J_{ox}\dot{\theta}$ et $\mathcal{M}_{ox}(\vec{P}) = -Pd = -\frac{mgL}{2} \sin\theta$

Donc $J\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{2} \sin\theta$

Comme $J = \frac{1}{3} mL^2$ on obtient $\boxed{\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} = mg\frac{L}{2} \sin\theta}$

2) On multiplie l'équation précédente par $\dot{\theta}$

$$\frac{1}{3} mL^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

En intégrant entre θ_0 et θ il vient :

$$\frac{1}{6} mL^2 \left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = -mg\frac{L}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

puis $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$ car $\dot{\theta}_0 = 0$

3) $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ donc $d\theta = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}\, dt$

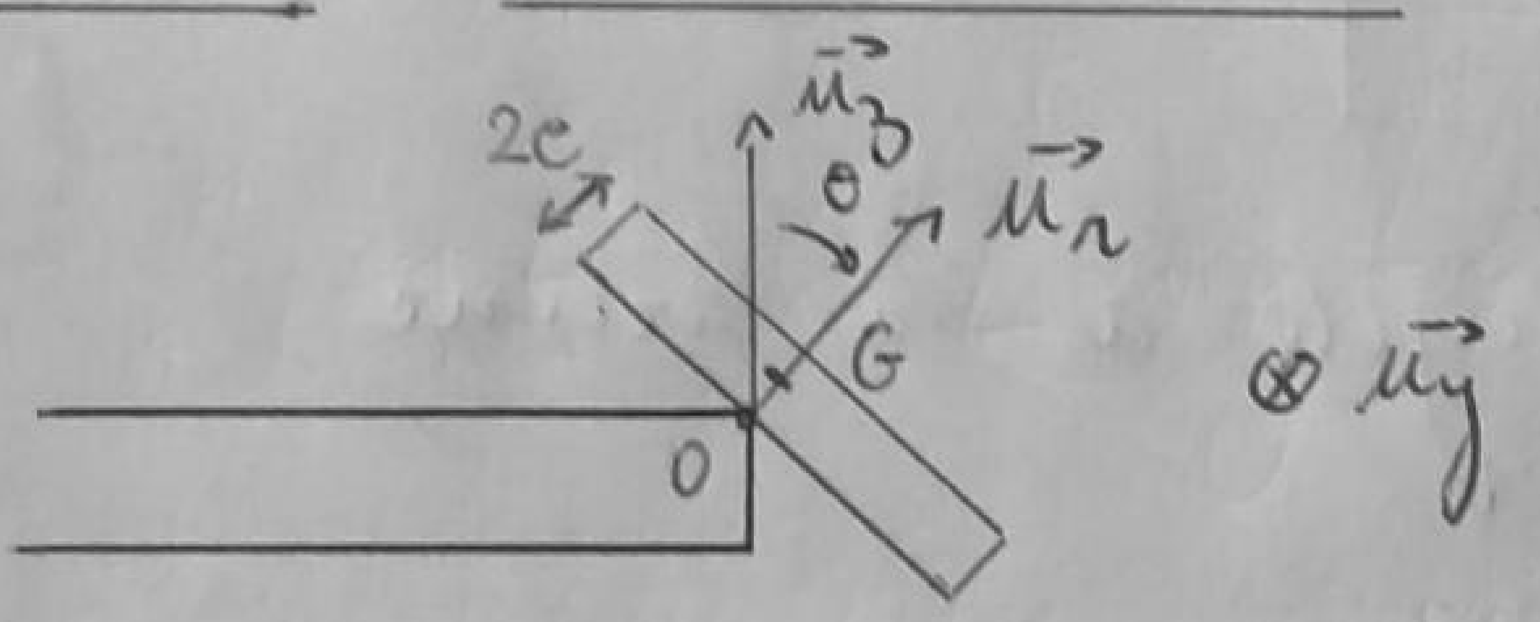
$$\text{Puis } \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\, dt$$

On intègre entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \int_0^{T} \sqrt{\frac{3g}{L}}\, dt$$

$$\boxed{T = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}}{\sqrt{\frac{3g}{L}}} = 5{,}1\,s}$$

Ex 5 : Tartine beurrée



1) 2 forces s'appliquent à la tartine :

- $\vec{P} = m\vec{g}$

  ↳ $\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = mge\sin\theta\, \vec{u_y}$

- $\vec{R}$ la réaction de la table

  ↳ $\vec{\mathcal{M}}(\vec{R}) = \vec{0}$ (passe par l'axe)

D'après le théorème de l'energie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Ici $E_c = \frac{1}{2} J_{oy} \dot{\theta}^2$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{oy}(\vec{P})\,\dot{\theta} = mge\dot{\theta}\sin\theta$

Ainsi $J_{oy}\dot{\theta}\ddot{\theta} \overset{1}{=} mge\dot{\theta}\sin\theta$ et $\boxed{J_{oy}\ddot{\theta} \overset{2}{=} mge\sin\theta}$

En intégrant l'équation précédente 1 il vient

$$\frac{1}{2}J(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = -mge(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Comme $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$ il vient

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{-2mge}{J}(\cos\theta - 1)}$$

2) On aplique le TMC projeté à la tartine

$$\frac{dL_{oy}}{dt} = \mathcal{M}_{oy}(\vec{P})$$

$$\boxed{J_{oy}\ddot{\theta} = mge\sin\theta}$$

3) Le mouvement de z_G est un mouvement de chute libre. La tartine n'est soumise qu'à son poids

$\ddot{z}_G = -g \rightarrow \dot{z}_G = -gt + 0 \rightarrow \boxed{z_G = -\frac{1}{2}gt^2 + 0}$

(on néglige $e\cos\frac{\pi}{4}$)

4) $z_G(t_F) = 0 \Rightarrow \boxed{t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

5) On a $\omega_0 = \dot{\theta}(t=0)$

pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ on a $\dot{\theta}_0^2 = \frac{2mge}{J}(1-\cos\theta_0)$

Puis $\boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2mge}{J}(1-\cos\theta_0)}}$

On a aussi $\dot{\theta} = cst = \omega_0$ donc $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$

Ainsi $\theta(t_F) = \omega_0 t_F + \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{\frac{2mge}{J}(1-\cos\theta_0)} + \frac{\pi}{4}$

<u>A.N</u> : $\boxed{\theta(t_F) = 3{,}3\,\text{rad} \sim 190°}$

6) La tartine tombe du coté beurré

7) les g se simplifient du résultat final donc $\theta(t_F)$ est indépendant de g et sera le même sur la Lune.

Ex 6 : Mesure de G

1) Dans ce cas $F_g = \frac{G m M_T}{R_T^2} = m g$

Soit $\boxed{g = \frac{G M_T}{R_T^2}}$

2) 2 moments s'appliquent au fléau.

- $\mathcal{M}_{oz}(\vec{F_g}) = \frac{G m M}{d^2} l$

  ↳ Ce moment s'applique 2 fois car il y a 2 petites sphères

- $\mathcal{M}_{oz\,torsion} = - C\theta$

- Dans la position 1 on peut appliquer le TMC projeté au fléau :

$$\frac{dL_{oz}}{dt} = 0 = 2 \frac{G m M}{d^2} l - C\theta_1$$

Ainsi $\theta_1 = \frac{2 G m M}{C d^2} l$

- Dans la position 2 on obtient de la même façon $\theta_2 = - \frac{2 G m M}{C d^2} l$ (le moment est dans l'autre sens)

Finalement $2\theta_0 = \theta_1 - \theta_2$ donc $\boxed{\theta_0 = \frac{2 G m M}{C d^2} l}$

Ainsi $\underline{G} = \frac{C d^2 \theta_0}{2 m M l} = \underline{6,6 . 10^{-11}} \, m^3 . kg^{-1} . s^{-2}$

3) On en déduit $\underline{M_T} = \frac{g R_T^2}{G} = \underline{6,7 . 10^{24} \, kg}$