

# OMPP 7

## Dipôles

École Centrale Pékin

2019-2020

### Table des matières

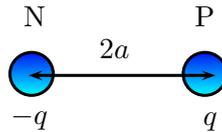
<b>1</b>	<b>Le dipôle électrostatique</b>	<b>2</b>
1.1	Le doublet de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$ . . . . .	2
1.2	Le dipôle électrostatique . . . . .	2
1.3	Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique . . . . .	2
1.4	Rencontre-t-on des dipôles électrostatiques dans la vraie vie? . . . . .	5
1.5	L'opérateur $\vec{b}.grad$ . . . . .	6
1.6	Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle rigide . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Le dipôle magnétique (ou magnétostatique)</b>	<b>11</b>
2.1	Définitions . . . . .	11
2.2	Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un dipôle magnétique . . . . .	12
2.3	Action d'un champ magnétique EXTERIEUR sur un dipôle magnétique . . . . .	14

# 1 Le dipôle électrostatique

La Nature est pleine de structures constituées de distributions de charges globalement neutres. Les atomes et les molécules constituent les exemples les plus simples. Si l'on s'interroge sur le champ électrostatique que créent de telles structures, naïvement on pourrait répondre qu'il est systématiquement nul. Il n'en est rien ! En particulier si le barycentre (几何中心)  $N$  des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre  $P$  des charges positives, cette distribution nommée distribution dipolaire crée un champ électrostatique que nous allons étudier.

## 1.1 Le doublet de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$

On appelle «doublet de deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$ », un ensemble de deux charges  $-q$  (une placée en  $N$ ) et  $+q$  (l'autre placée en  $P$ ) distants de  $2a$ .



## 1.2 Le dipôle électrostatique

- On nomme «dipôle», un doublet dont la dimension  $2a$  est petite devant d'autres longueurs intervenant dans l'étude. Par exemple, si l'on étudie le champ électrostatique créé par le doublet à une distance très grande devant  $2a$ , on parlera de champ électrostatique créé par le dipôle.

**Le dipôle ne désigne rien d'autre que le doublet «vu à grande distance».**

- Lorsque la distance  $2a$  est constante, on parle de dipôle *rigide*. La suite de ce cours ne s'intéresse qu'au dipôle *rigide*.
- Une caractéristique quantitative du dipôle est son moment dipolaire défini par :

$$\boxed{\vec{p} \triangleq q\overrightarrow{NP}} \quad (\text{unité : C.m})$$

Les chimistes utilisent aussi l'unité suivante : le debye (D)  $1D = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$

## 1.3 Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique

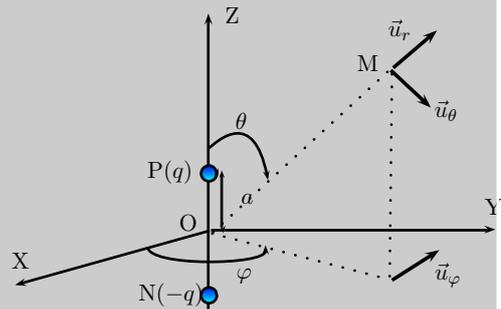
Le but de ce paragraphe est de calculer le champ électrostatique créé par le dipôle. La démarche consiste à calculer un potentiel électrostatique  $V(M)$ , puis à en déduire le champ électrostatique par la relation :  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$ .

### 1.3.1 Calcul de $V(M)$ dans l'approximation dipolaire

- Un potentiel électrostatique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$  s'écrit avec le choix des coordonnées sphériques :

$$\boxed{V_{\text{dipole}}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

- Alors que le potentiel électrostatique créé par une charge varie en  $\frac{1}{r}$ , le potentiel électrostatique créé par le dipôle varie en  $\frac{1}{r^2}$ .



 Démontrer l'expression de  $V_{\text{dipole}}$  précédente.

$$V_{\text{dipole}} = V_N(r) + V_P(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{N\pi} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{P\pi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{P\pi} - \frac{1}{N\pi} \right)$$

$$r\pi^2 = \|\vec{r}\pi\|^2 = \|\vec{P}\vec{O} + \vec{O}\vec{\pi}\|^2 = \underbrace{\|\vec{P}\vec{O}\|^2}_{a^2} + \underbrace{\vec{P}\vec{O} \cdot \vec{O}\vec{\pi}}_{-2a\pi\cos\theta} + \underbrace{\|\vec{O}\vec{\pi}\|^2}_{\pi^2}$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{P\pi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a\pi\cos\theta + \pi^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2} - \frac{a}{\pi}\cos\theta + 1}} \sim \frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{a}{2\pi}\cos\theta - \frac{a^2}{2\pi^2} \right)$$

$$\text{De même } \frac{1}{N\pi} \sim \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{a}{2\pi}\cos\theta - \frac{a^2}{2\pi^2} \right)$$

$$\text{On a alors } \frac{1}{P\pi} - \frac{1}{N\pi} = \frac{a}{\pi^2}\cos\theta \quad \text{puis } V(r) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\pi^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De plus } p = qa \\ \text{et } \vec{p} \cdot \vec{\pi} = p\pi\cos\theta \end{array} \right) \text{ donc } \boxed{V(r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\pi^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\pi}}{4\pi\epsilon_0\pi^3}}$$

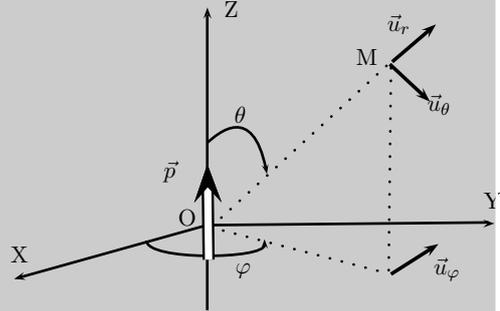
Ici  $V(r) \propto \frac{1}{r^2}$  diminue plus vite que dans le cas d'une charge unique ( $V \propto \frac{1}{r}$ )

### 1.3.2 Calcul du champ électrostatique

- Le champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$  s'écrit **avec le choix des coordonnées sphériques** :

$$\vec{E}_{dipole}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Le champ électrostatique créé par une charge varie en  $\frac{1}{r^2}$  tandis que celui créé par le dipôle varie en  $\frac{1}{r^3}$ .



Démontrer l'expression de  $\vec{E}_{dipole}$

$\vec{E} = - \text{grad } V$  donc en sphérique

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

### 1.3.3 Allure des lignes de champ

Quelques lignes de champ ont été représentées sur la figure 1.1 (ce sont les lignes orientées). Les lignes non orientées (couleur gris) sont des lignes équipotentielles. On constate :

- que les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan de symétrie xOz du dipôle ;
- que les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan d'antisymétrie xOy du dipôle. Elles coupent orthogonalement ce plan.

Il semble que les lignes de champ soient fermées (ce qui est en désaccord avec le caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique). En fait il n'en est rien ! Puisqu'on s'est intéressé au dipôle, on s'est engagé à se placer loin du doublet : il semble n de loin z que les lignes de champ soient fermées. Si on «zoom» au voisinage du doublet, on obtient les lignes de champ de la figure 1.2 qui ne sont pas fermées.

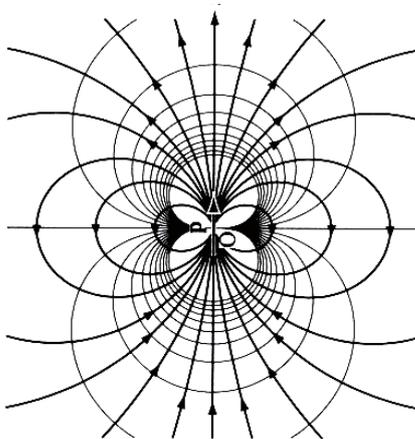


FIGURE 1.1 – Lignes de champ et équipotentielles du dipôle électrostatique

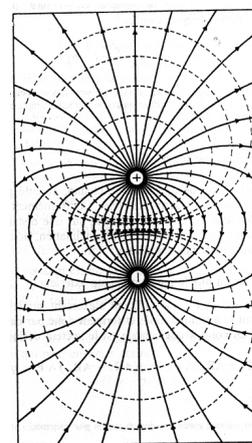


FIGURE 1.2 – Lignes de champ et équipotentielles du doublet

## 1.4 Rencontre-t-on des dipôles électrostatiques dans la vraie vie ?

Le début du cours peut paraître formel et déconnecté du réel. Il n'en est rien, on admettra :

**Le dipôle modélise toute distribution de charges neutre mais dont le barycentre P des charges positives est différent du barycentre N des charges négatives. Les actions exercées et subies par ce dipôle sont entièrement caractérisées par la donnée du moment dipolaire  $\vec{p} = q\overline{NP}$ .**

### 1.4.1 Les molécules polaires

- La notion de dipôle électrostatique est cruciale en chimie où de nombreuses molécules (neutres) possèdent un barycentre des charges positives distinct de celui des charges négatives : on parle de **molécules polaires**<sup>1</sup> (分子的极性).
- **Exemples de molécules polaires** : on a présenté le cas du fluorure d'hydrogène HF (figure 1.3 ;  $p_{\text{HF}} = 1,82 D$ ) ainsi que celui très connu de l'eau H<sub>2</sub>O (figure 1.4 ;  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 1,82 D$ ). Sur chacune des figures, les zones rouges (respectivement bleues) représentent les zones chargées négativement (respectivement positivement).
- **Exemples de molécules apolaires** : lorsque la molécule est «très symétrique», on ne saurait trouver de causes qui sépareraient le barycentre des charges positives de celui des charges négatives de sorte que la molécule présente un moment dipolaire nul. C'est le cas du trifluorure de bore BF<sub>3</sub> (figure 1.5) et du méthane CH<sub>4</sub> (figure 1.6).

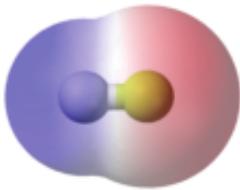


FIGURE 1.3 – HF polaire

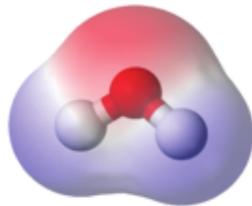


FIGURE 1.4 – H<sub>2</sub>O polaire

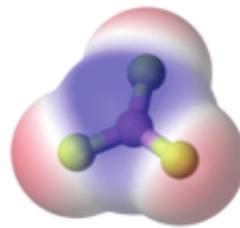


FIGURE 1.5 – BF<sub>3</sub> apolaire

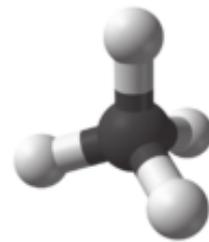


FIGURE 1.6 – CH<sub>4</sub> apolaire

### 1.4.2 Les molécules polarisables

Les molécules polarisables sont des molécules dont le moment dipolaire permanent est nul mais qui acquièrent un moment dipolaire en présence d'un champ électrique extérieur.

L'origine physique de ce phénomène peut s'interpréter simplement : si l'on place dans un champ électrique extérieur une molécule dépourvue de moment dipolaire, les charges positives subissent des forces dans le sens du champ extérieur tandis que le nuage électronique se trouve déformé dans le sens opposé ; on dit que la molécule se polarise (voir figure 1.7). Le barycentre des charges positives ne coïncidant plus avec le barycentre des charges négatives, la molécule acquiert un moment dipolaire induit, en général colinéaire au champ et de même sens que celui-ci.

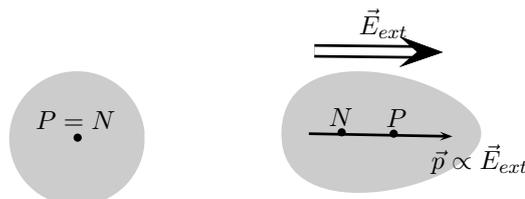


FIGURE 1.7 – À gauche : molécule en l'absence de champ électrique extérieur ; à droite : molécule en présence de champ extérieur

1. Au contraire, si la molécule est dépourvue de moment dipolaire, on parle de **molécule apolaire**.

### 1.5 L'opérateur $\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}$

Soit un champ de vecteurs  $\{\vec{b}(M, t); M \in D; t \in I\}$ . Le produit scalaire  $(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad})$  est indépendant d'un choix de base. On peut écrire, suivant la base retenue, :

Coordonnées	$\vec{b}(M, t)$	$\overrightarrow{grad}$	$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad})$
cartésiennes	$b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z}$
cylindriques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial}{\partial z}$
sphériques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_\varphi \vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$b_r \frac{\partial}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + b_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

#### 1.5.1 ...appliqué à un champ de scalaires

Si, par ailleurs, on se donne un champ de scalaires  $\{F(M, t); M \in D; t \in I\}$ , on calcule aisément :

$$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) F = b_x \frac{\partial F}{\partial x} + b_y \frac{\partial F}{\partial y} + b_z \frac{\partial F}{\partial z} = \underbrace{(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z)}_{\vec{b}} \cdot \underbrace{\left( \vec{e}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial F}{\partial z} \right)}_{\overrightarrow{grad} F} = \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} F)$$

Le produit scalaire étant indépendant du choix de la base, on tire le résultat suivant

Soient le champ de vecteurs  $\{\vec{b}(M, t); M \in D; t \in I\}$  et le champ de scalaires différentiable  $\{F(M, t); M \in D; t \in I\}$  :

$$\boxed{(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) F = \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} F)}$$

#### 1.5.2 ...appliqué à un champ de vecteurs

Si, par ailleurs, on se donne un champ de vecteurs  $\{\vec{A}(M, t); M \in D; t \in I\}$ , on a alors :

Coordonnées	$\vec{b}(M, t)$	$\overrightarrow{grad}$	$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A}$
cartésiennes	$b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$
cylindriques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_z \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$b_r \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$
sphériques	$b_r \vec{e}_r + b_\theta \vec{e}_\theta + b_\varphi \vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$b_r \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} + b_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} + b_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi}$

■ Dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_x) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_y) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_z) \end{pmatrix}$$

■ Dans les autres systèmes de coordonnées, il faut tenir compte du fait que les vecteurs de bases  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  ne sont pas toujours de dérivée nulle par rapport aux variables d'espace. <sup>a</sup>

a. En particulier :  $(\vec{b} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{A} \neq \begin{pmatrix} \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_r) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_\theta) \\ \vec{b} \cdot (\overrightarrow{grad} A_z) \end{pmatrix}$  par exemple.

## 1.6 Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle rigide

Jusqu'à maintenant on s'est intéressé au champ créé par un dipôle. Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer les actions mécaniques exercées par un champ électrostatique (qu'on va nommer «extérieur» pour le distinguer du champ électrostatique créé par le dipôle) sur le dipôle.

### 1.6.1 Actions exercées par un champ extérieur uniforme sur le dipôle

#### □ Un champ électrostatique uniforme est-il uniforme ?!

Si on modélise le dipôle par une charge  $-q$  placée en N et une charge  $+q$  placée en P, le dipôle «ressentira» un champ électrostatique uniforme si  $\vec{E}_{ext}(N) \approx \vec{E}_{ext}(P)$  autrement dit, si les variations spatiales du champ extérieur sont négligeables à l'échelle du dipôle.

**Si les variations spatiales du champ électrostatique extérieur sont négligeables à l'échelle du dipôle, ce champ électrostatique sera considéré comme uniforme pour le dipôle.**

#### □ Actions exercées par un champ extérieur uniforme sur le dipôle

- Le torseur des actions exercées par le champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$  uniforme à l'échelle du dipôle est le couple <sup>a</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext} \end{array} \right\}$$

- L'énergie potentielle d'interaction du champ électrique avec le dipôle électrostatique est :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

- Le champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$  a *tendance* à aligner le dipôle électrostatique  $\vec{p}$  dans sa direction et dans son sens.

a. On admettra que le résultat persiste si  $\vec{E}_{ext}(t)$  dépend du temps  $t$  mais «qu'il ne varie pas trop vite» (approximation des états quasi-stationnaires).

 Démontrer les résultats précédents

$$\begin{aligned} \vec{F}_{tot} &= \vec{F}_N + \vec{F}_P = -q\vec{E}_{ext} + q\vec{E}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{M}_{tot} &= \vec{M}_O(\vec{F}_N) + \vec{M}_O(\vec{F}_P) = O\vec{N} \wedge (-q\vec{E}_{ext}) + O\vec{P} \wedge (q\vec{E}_{ext}) \\ &= (\vec{NO} + \vec{OP}) \wedge (q\vec{E}_{ext}) \\ &= \vec{NP} \wedge (q\vec{E}_{ext}) \\ \vec{M}_{tot} &= \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext} \quad \text{car } \vec{p} = q\vec{NP} \end{aligned}$$

• L'énergie potentielle d'interaction d'une particule chargée avec un champ électrique est  $E_p = qV$  donc  $E_p = q(V_r - V_N)$

On  $\vec{E} = -\text{grad} V$  et  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$  en intégrant entre N et P il vient :

$$\vec{E} \cdot \vec{NP} = -(V_P - V_N)$$

Ainsi  $E_p = -q \vec{E} \cdot \vec{NP} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

## □ Applications

1. Fonctionnement d'un four à micro-ondes (微波炉) (voir vidéo diffusée en classe).
2. En présence d'un champ électrique extérieur, les grains de semoule (粗粒小麦粉) se polarisent (c'est-à-dire qu'il acquièrent un moment dipolaire induit). Ils ont alors tendance à s'aligner dans la direction du champ électrostatique ce qui permet de matérialiser les lignes de champ électrostatique. La figure 1.9 présente des grains de semoule plongés dans une solution de glycérine (甘油) : la champ électrostatique est créé par les deux conducteurs (la plaque et le cylindre). La figure 1.8 est une simulation informatique de la même situation : vous noterez que l'allure des lignes de champ électrostatique coïncide.

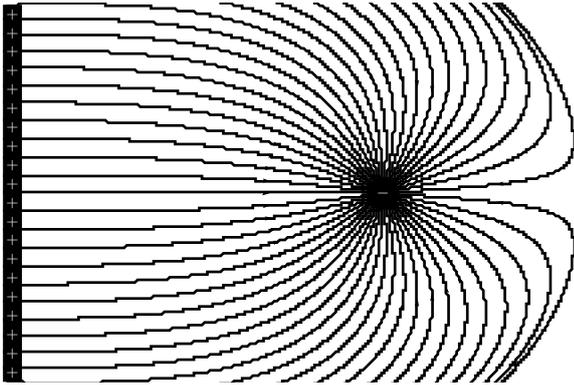


FIGURE 1.8 – Simulation informatique des lignes de champ électrostatique créées par les deux conducteurs

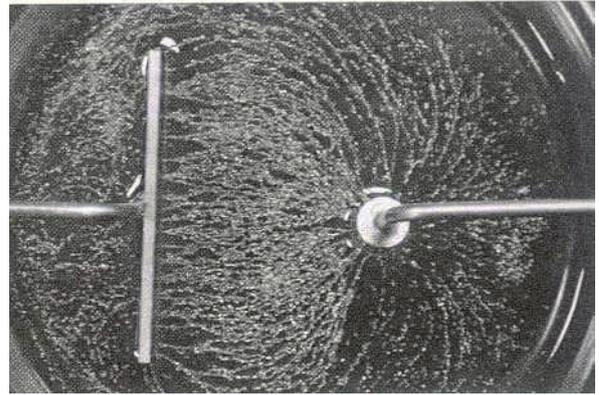


FIGURE 1.9 – Matérialisation des lignes de champ électrostatique par des grains de semoule

### 1.6.2 Actions exercées par un champ extérieur quelconque sur le dipôle

Le torseur des actions exercées par le champ extérieur  $\vec{E}_{ext}(M)$  est *au premier ordre* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{grad}) \vec{E}_{ext}(M) \\ \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(M) \end{array} \right\}$$

 Démontrer les résultats précédents

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{F} &= \vec{F}(N) + \vec{F}(P) \\ &= q (\vec{E}(P) - \vec{E}(N)) \end{aligned}$$

Sur l'axe  $x$  :  $F_x = q (E_x(P) - E_x(N))$   
 $= q dE_x(N)$  et  $dE_x = \vec{grad} E_x \cdot d\vec{l} = \vec{N}\vec{P} \cdot \vec{grad} E_x$

donc  $F_x = q \vec{N}\vec{P} \cdot \vec{grad} E_x = \vec{p} \cdot \vec{grad} E_x$

puis  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{grad}) \vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_0 &= \vec{\Gamma}_0(N) + \vec{\Gamma}_0(P) \\ &= \vec{ON} \wedge -q\vec{E}(N) + \vec{OP} \wedge q\vec{E}(P) \end{aligned}$$

Au premier ordre  $\vec{E}(P) = \vec{E}(N) + (\vec{NP} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{E}$

$$\text{Donc } \vec{\Gamma}_0 = \vec{ON} \wedge -q\vec{E}(N) + \vec{OP} \wedge q\vec{E}(N) + \vec{OP} \wedge ((\vec{NP} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{E})$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \vec{P} \wedge \vec{E} + \underbrace{\vec{OP} \wedge ((\vec{NP} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{E})}_{\text{en général négligeable}}$$

### □ Application

Lorsqu'on électrise un bâtonnet<sup>a</sup> que l'on place au voisinage d'un filet d'eau, le filet est dévié à cause de l'action de ce champ non uniforme sur le moment dipolaire des molécules d'eau (cf. figure 1.10).

<sup>a</sup>. C'est-à-dire qu'on place à sa surface des charges qui vont créer un champ électrostatique.

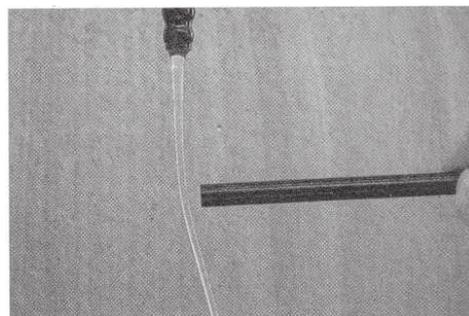


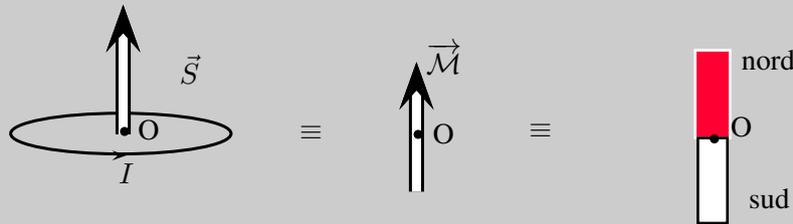
FIGURE 1.10 – Déviation d'un filet d'eau par l'action d'un champ non uniforme.

## 2 Le dipôle magnétique (ou magnétostatique)

### 2.1 Définitions

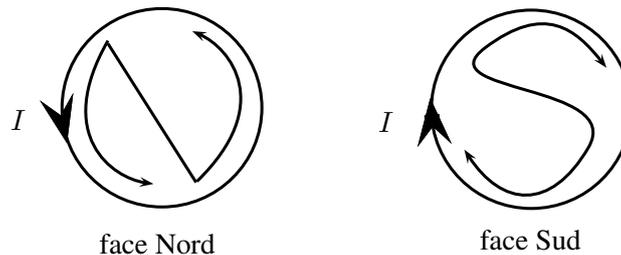
#### 2.1.1 Définition du moment magnétique

Le moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  d'une boucle orientée parcourue par un courant d'intensité  $I$  est défini par  $\vec{M} \triangleq I\vec{S}$  (unité :  $A \cdot m^2$ )



#### 2.1.2 Face nord, face sud d'une boucle de courant

La notion de moment magnétique a été introduite, au paragraphe précédent, sur une boucle de courant ; on sait cependant que cette notion peut intervenir dans la matière sans la présence de quelconques générateurs : c'est le cas de la matière aimantée. Les aimants possèdent deux faces (la face nord est du côté de la pointe de la flèche de  $\vec{M}$ , la face sud à l'opposé) et l'on peut, par analogie à ces aimants, attribuer une face nord et une face sud à une boucle de courant. Le moyen mnémotechnique ci-dessous que l'on apprenait autrefois au collège, permet de retrouver la polarité de chaque face de la boucle :



#### 2.1.3 Définition du dipôle magnétostatique (ou magnétique)

On appelle dipôle magnétique toute distribution de courants permanents dont le moment magnétique est non nul et dont les dimensions sont faibles par rapport à la distance à laquelle on décrit le champ magnétique qu'elle engendre.

On verra au paragraphe 2.2 que le moment dipolaire  $\vec{M}$  permet de caractériser quantitativement les propriétés du dipôle magnétique.

Remarque : On avait, dans le paragraphe 1, distingué le doublet de charges, du dipôle électrostatique (ce dernier correspondant au doublet «considéré à grande distance»). On peut, de même, distinguer la boucle de courant, du dipôle magnétique (ce dernier correspondra donc à une boucle de courant «considérée à grande distance»).

## 2.2 Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un dipôle magnétique

### 2.2.1 Expressions

On admettra les résultats suivants dont on remarquera **qu'ils présentent une forte analogie avec le potentiel scalaire et le champ électrostatique créés par un dipôle électrostatique** ce qui permet de diminuer l'effort de mémorisation.

On considère un dipôle magnétique caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{M} = M\vec{u}_z$  placé en O. On adopte la base locale sphérique (voir figure 2.1).

- Un potentiel vecteur créé par ce dipôle en un point M de l'espace a pour expression :

- en coordonnées sphériques : 
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\varphi$$

- de manière intrinsèque : 
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

- Le champ magnétique s'écrit avec le choix des coordonnées sphériques :

$$\vec{B}_{dipole}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)(M) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

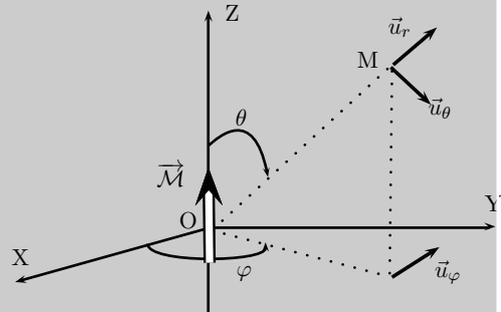


FIGURE 2.1

### 2.2.2 Allure des lignes de champ ; comparaison avec le dipôle électrostatique

Les expressions des champs électrostatique et magnétostatique créés respectivement par les dipôles électrostatique et magnétostatique étant identiques, les lignes de champ sont identiques. On pourra donc se reporter au paragraphe 1 pour contempler à nouveau les fameuses lignes. Nous insistons ci-dessous sur la comparaison des lignes de champ créés par une boucle de courant (fig. 2.2) et le doublet de charges (fig. 2.3). On remarquera que les lignes de champ magnétostatique entourent la boucle de courant.

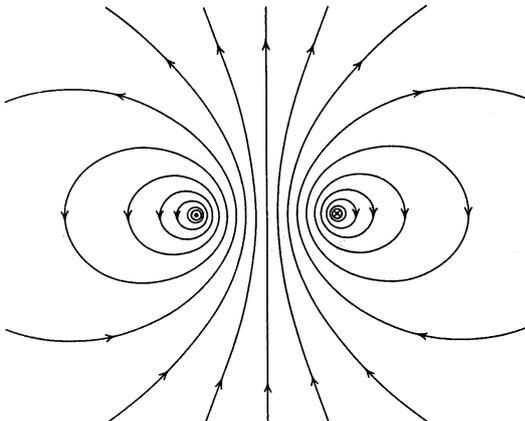


FIGURE 2.2 – Lignes de champ du doublet magnétique

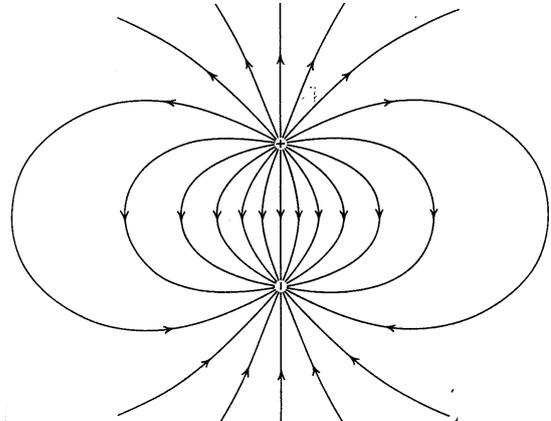
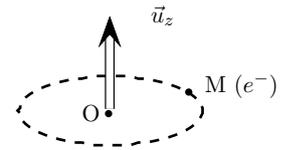


FIGURE 2.3 – Lignes de champ du doublet électrostatique

### 2.2.3 Exemples ; ordres de grandeur

#### ■ Magnéton de Bohr

On considère un modèle pré-quantique d'atome (dit atome de BOHR) où l'électron a une trajectoire circulaire uniforme autour d'un point O. Déterminons le moment magnétique  $\vec{M}$  de cet édifice.



$$i = \frac{-e}{T} \text{ donc } \vec{M} = -\frac{e}{T} \pi r^2 \vec{u}_z$$

Mais  $-m \frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$  donc  $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m r}} = \frac{2\pi r}{T}$

Ainsi  $T = \frac{2\pi r}{v}$  et  $\vec{M} = -\frac{evr}{2} \vec{u}_z$

#### ■ Champ magnétique terrestre

La Terre produit un champ magnétique terrestre équivalent à celui d'un dipôle magnétique placé en son centre mais orienté du nord géographique vers le sud géographique. Sa valeur est de l'ordre de  $\|\vec{M}\| \sim 10^{23} \text{ A.m}^2$ .

Le champ magnétique terrestre s'inverse durant des périodes allant de la dizaine de milliers à de nombreux millions d'années, avec un intervalle moyen de 250 000 ans environ. La dernière modification est peut-être survenue il y a 780 000 ans. Le mécanisme responsable de cette inversion géomagnétique n'est pas encore bien compris.

Culturel : Le champ magnétique terrestre est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide des couches profondes de la Terre. La Terre possédait déjà un champ magnétique il y a 3,2 milliards d'années. La magnétosphère créée par le champ magnétique terrestre, joue un rôle essentiel dans le développement de la vie sur Terre, en déviant les particules mortelles du vent solaire et des rayons cosmiques formant ainsi un des plus magnifique phénomène naturel : les aurores boréales et australes. Lorsque le noyau se sera refroidi (dans quelques... milliards d'années) et qu'en conséquence le champ magnétique aura disparu, il est probable que les formes de vie existantes ne pourront plus subsister. Ces conditions sont celles qui règnent aujourd'hui sur la Lune et Mars.

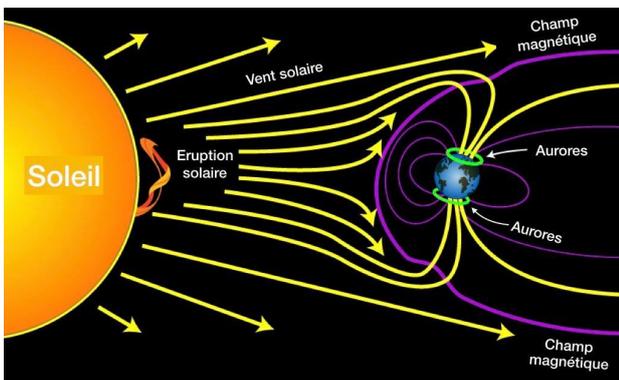


FIGURE 2.4 – La magnétosphère protège des vents solaires



FIGURE 2.5 – Aurore boréale

### 2.3 Action d'un champ magnétique EXTERIEUR sur un dipôle magnétique

Jusqu'à maintenant on s'est intéressé au champ créé par un dipôle magnétique. Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer les actions mécaniques exercées par un champ magnétique (qu'on va nommer «extérieur» pour le distinguer du champ magnétique créé par le dipôle) sur le dipôle.

#### 2.3.1 Actions exercées par un champ extérieur uniforme sur le dipôle

Le torseur des actions exercées par le champ extérieur  $\vec{B}_{ext}$  uniforme à l'échelle du dipôle est le couple <sup>a</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext} \end{array} \right\}$$

• L'énergie potentielle d'interaction du champ magnétique extérieur avec le dipôle magnétique est :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$$

• Le champ extérieur  $\vec{B}_{ext}$  a *tendance* à aligner le dipôle magnétique  $\vec{M}$  dans sa direction et dans son sens.

a. On admettra que le résultat persiste si  $\vec{B}_{ext}(t)$  dépend du temps  $t$  mais «qu'il ne varie pas trop vite» (approximation des états quasi-stationnaires).

#### 2.3.2 Actions exercées par un champ extérieur quelconque sur le dipôle

Le torseur des actions exercées par le champ extérieur  $\vec{B}_{ext}(M)$  s'écrit *au premier ordre* :

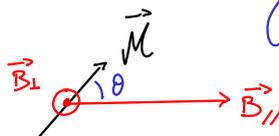
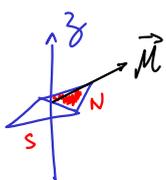
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}(M) \\ \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}(M) \end{array} \right\}$$

Ces résultats sont admis.

Applications :

1. Comment fonctionne une boussole (指南针) ?

L'aiguille de la boussole est un petit aimant de moment magnétique  $\vec{M}$



Vue du dessus



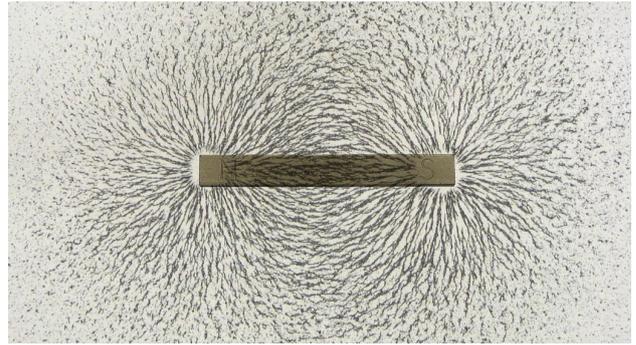
On applique le TTC projeté sur  $\vec{u}_z$  à l'aiguille :  $\rightarrow$  frottement fluide

$$J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z + \vec{\Gamma}_{\text{rot}} \cdot \vec{u}_z = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z - h\dot{\theta}$$

$$J\ddot{\theta} = MB \sin \theta - h\dot{\theta} \rightarrow \text{A l'équilibre } \theta = 0$$

2. Matérialisation de lignes de champ magnétique grâce à la limaille de fer (铁屑).

La limaille de fer acquiert un moment magnétique sous l'effet du champ magnétique

$$\vec{M}_{\text{induit}} \propto \vec{B}_{\text{ext}}$$


les moments magnétiques induit s'alignent ensuite sur le champ magnétique.

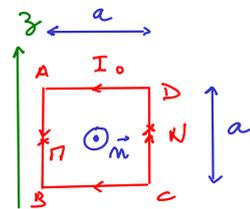
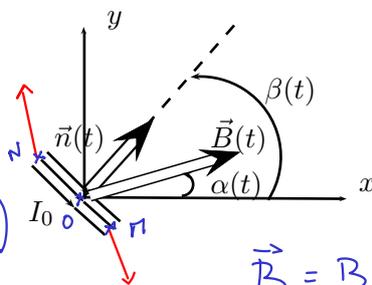
3. Principe de fonctionnement d'un moteur synchrone (同步电机).

On considère  $N$  spires carrées de coté  $a$  parcourues par un courant  $I_0$  maintenu constant (par un dispositif non explicité) et dont le vecteur normal  $\vec{n}(t)$  fait un angle  $\beta(t) = \omega't + \varphi$  avec  $Ox$ . Cet ensemble de spires est entraîné en rotation (à la vitesse angulaire  $\omega'$  que l'on cherche à déterminer) autour de l'axe  $Oz$  par un champ magnétique extérieur tournant de norme constante  $B_0$  contenu dans le plan  $xOy$  et faisant un angle  $\alpha(t) = \omega t$  avec  $Ox$ . On n'étudiera pas ici les modalités de la réalisation d'un tel champ.

✎ Calculer  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ , valeur moyenne du couple des forces de Laplace appliqué au circuit. Pourquoi appelle-t-on ce dispositif moteur synchrone? Quelle inconvénient ce moteur présente-t-il au démarrage?

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \frac{a}{2} (\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) \vec{e}_x - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \vec{e}_y) \\ &= \frac{a}{2} (\sin(\omega't + \varphi) \vec{e}_x - \cos(\omega't + \varphi) \vec{e}_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \frac{a}{2} (-\sin(\beta) \vec{e}_x + \cos(\beta) \vec{e}_y) \\ &= \frac{a}{2} (-\sin(\omega t) \vec{e}_x + \cos(\omega t) \vec{e}_y) \end{aligned}$$



$$\vec{B} = B \cos \omega t \vec{e}_x + B \sin \omega t \vec{e}_y$$

• AB

$$d\vec{l} = -dz \vec{e}_z$$

$$d\vec{F}_L = I_0 d\vec{l} \wedge \vec{B} = I_0 B dz (-\cos \omega t \vec{e}_y + \sin \omega t \vec{e}_x)$$

$$\vec{F}_{L_{AB}} = \int_A^B d\vec{F}_L = I_0 B a (-\cos \omega t \vec{e}_y + \sin \omega t \vec{e}_x)$$

• BC

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$$

$$d\vec{F}_L = I_0 (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \wedge (B \cos \omega t \vec{e}_x + B \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$$d\vec{F}_L = I_0 B \sin \omega t dx \vec{e}_z - I_0 B \cos \omega t dy \vec{e}_z$$

$d\vec{F}_L \propto \vec{e}_z$  donc son moment est nul

De même:

• CD

$$\vec{F}_{L_{CD}} = I_0 B a (\cos \omega t \vec{e}_y - \sin \omega t \vec{e}_x)$$

• DA

$d\vec{F}_L \propto \vec{e}_z$  donc son moment est nul

Ainsi  $\vec{M} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{L_{AB}} + \vec{ON} \wedge \vec{F}_{L_{CD}} = 2 \vec{OP} \wedge \vec{F}_{L_{AB}} \left( \text{car } \begin{array}{l} \vec{OP} = -\vec{ON} \\ \vec{F}_{L_{AB}} = -\vec{F}_{L_{CD}} \end{array} \right)$

$$= a (\sin(\omega't + \varphi) \vec{e}_x - \cos(\omega't + \varphi) \vec{e}_y) \wedge I_0 B a (-\cos \omega t \vec{e}_y + \sin \omega t \vec{e}_x)$$

$$= I_0 B a^2 (-\sin(\omega't + \varphi) \cos \omega t + \cos(\omega't + \varphi) \sin \omega t) \vec{e}_z$$

$$= I_0 B a^2 \sin(\omega t - \omega't - \varphi) \vec{e}_z$$

$$= I_0 B a^2 \sin((\omega - \omega')t - \varphi) \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{M} \rangle = \vec{0} \text{ si } \omega \neq \omega'$$

$$= I_0 B a^2 \sin \varphi \text{ si } \omega = \omega'$$

(Pour N spire  $\mathcal{M}_N = N \mathcal{M}_1$ )  
car  $\vec{F}_N = N \vec{F}_1$

la force de Laplace exerce un couple moteur ssi  $\omega = \omega'$  d'où l'appellation de "moteur synchrone".

Au démarrage  $\omega' = 0$ , il n'y a pas de couple. Il faut lancer la spire