OMPP

TD14 - Corrigé

Ex 1 : Moment dipolaire magnétique

Chaque élément $\vec{dl} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$ ressent une force de Laplace élementaire $\vec{dF_L} = iR\,d\theta\,\vec{e_\theta} \wedge \vec{B}$

Ainsi $\Gamma = \int_0^{2\pi} \vec{OM} \wedge \vec{dF_L} = \int_0^{2\pi} R\,\vec{e_r} \wedge (iR\,d\theta\,\vec{e_\theta} \wedge \vec{B})$

$$= iR^2 \int_0^{2\pi} (\vec{e_r} \wedge (\vec{e_\theta} \wedge \vec{B}))\,d\theta$$

Or $\vec{e_r} \wedge (\vec{e_\theta} \wedge \vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{e_r})\vec{e_\theta} - (\vec{e_r}\cdot\vec{e_\theta})\vec{B}$

$$= B_r\,\vec{e_\theta}$$

Or • $B_r = \vec{B}\cdot\vec{e_r} = \vec{B}\,(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y})$

$$= B_x\cos\theta + B_y\sin\theta$$

• $\vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_x}$

Donc $B_r\,\vec{e_\theta} = (B_x\cos^2\theta + B_y\cos\theta\sin\theta)\,\vec{e_y} - (B_x\cos\theta\sin\theta + B_y\sin^2\theta)\,\vec{e_x}$

Ainsi $\vec{\Gamma} = \int_0^{2\pi} iR^2 \left(B_x \cos^2\theta + B_y \cos\theta \sin\theta\right)\vec{e_y} - \left(B_x \cos\theta \sin\theta + B_y \sin^2\theta\right)\vec{e_x}\, d\theta$

$\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \; d\theta = 0$

donc $\vec{\Gamma} = iR^2(\pi B_x \vec{e_y} - \pi B_y \vec{e_x})$

$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta = \pi$

Finalement $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}}$ avec $\vec{\mathcal{M}} = iR^2\pi \; z$

Ex 2 : Equilibre d'une spire

1) D'après le cours $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$

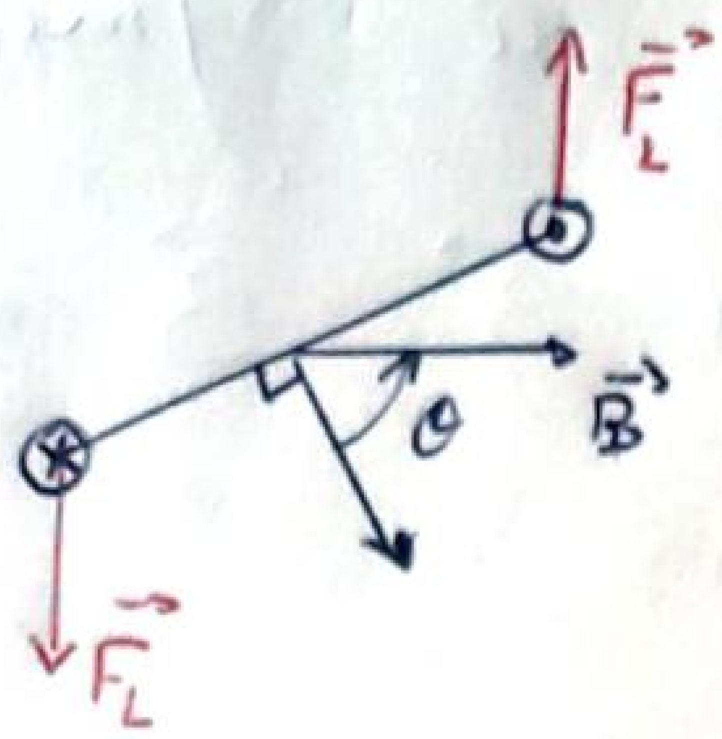
ici $\vec{\mathcal{M}} = iS\vec{n}$ donc $E_p = -iSB\cos\theta$

$\frac{dE_p}{d\theta} = iSB\sin\theta$ donc $\boxed{\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0\,[\pi]}$

les positions d'équilibre de la spire sont $\theta = 0\,[\pi]$

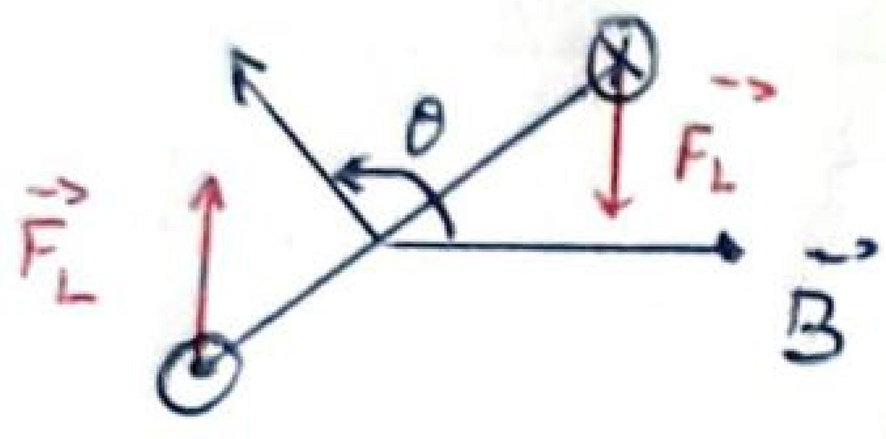
Pour ces positions $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ ce sont donc bien des position d'équilibre

2)



$\vec{F_L} = \int i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$ donc $\vec{F_L} \perp \vec{dl}$ et $\vec{F_L} \perp \vec{B}$

Proche de $\theta = 0$ la force de Laplace tend à rapprocher la spire de l'équilibre c'est donc un équilibre stable.



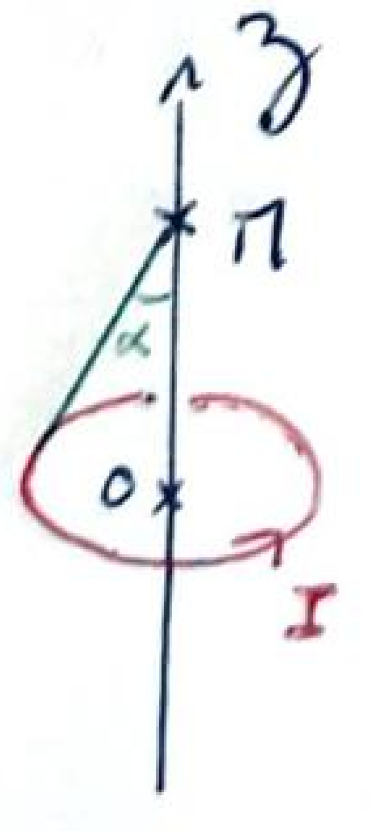
Proche de $\theta = \pi$ la force de Laplace tend à s'éloigner de l'équilibre donc l'équilibre est instable.

3) $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} = iSB\cos\theta$ donc $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) > 0 \rightarrow$ stable

$\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(\pi) < 0 \rightarrow$ instable

Ex 3 : Comparaison de 2 modèles

1)



Tout plan perpendiculaire à la Spire et contenant l'axe Oz est un plan d'antisymetrie des courants donc $\vec{B}$ leur appartient et $\vec{B} \propto \vec{e_z}$ sur l'axe.

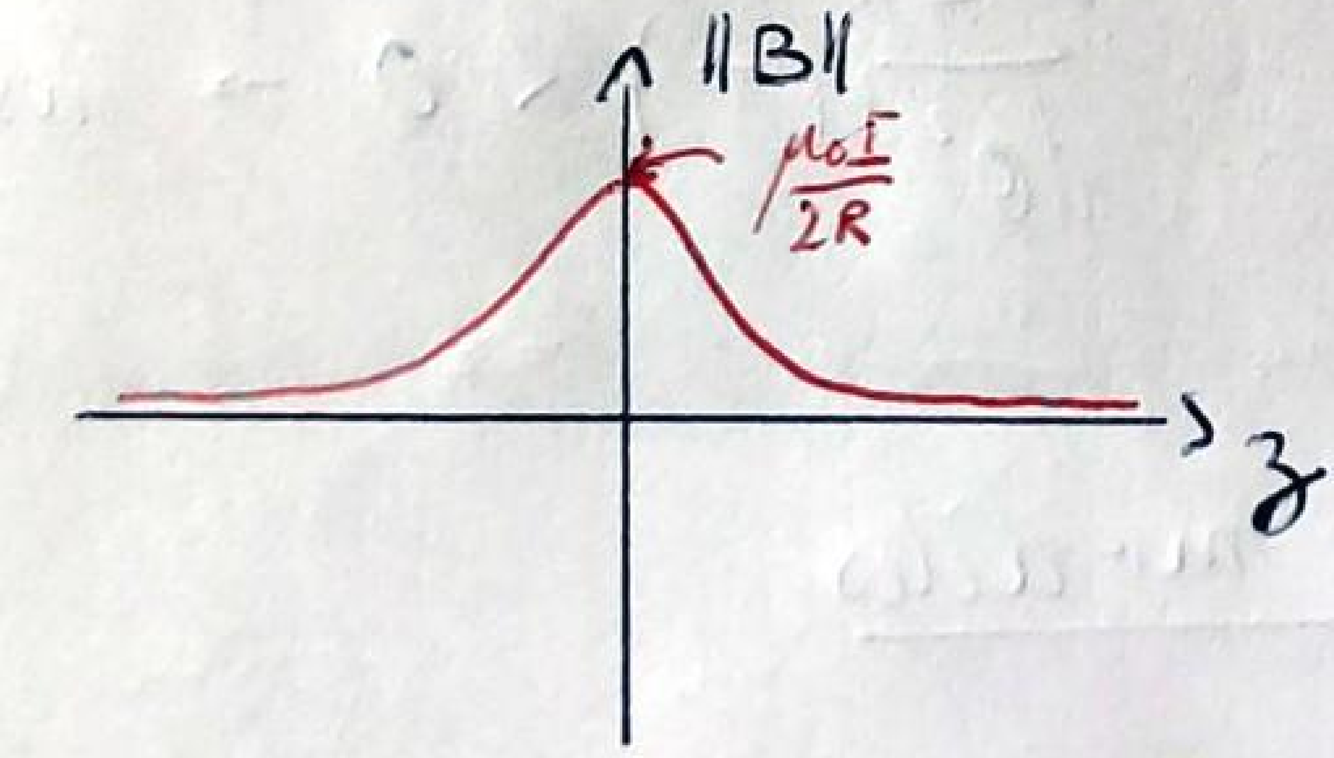
le plan de la spire est un plan de symetrie des courants donc d'antisymetrie de $\vec{B}$. $\vec{B}$ est impair avec z

2) $\frac{dB}{d\alpha} = \frac{3\mu_0 I}{2R} \cos\alpha \sin^2\alpha$

$\frac{dB}{d\alpha} = 0$ pour $\alpha = 0 [\frac{\pi}{2}]$ et $\frac{d^2B}{d\alpha^2}(\frac{\pi}{2}) > 0$ donc

B est maximum en $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$ donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{e_z}$



3) $\mathcal{C}_{AA'} = \int_A^{A'} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha \, dz$

Or $\tan\alpha = \frac{R}{z}$ donc $dz = -\frac{R\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$

Ainsi $\mathcal{C}_{AA'} = \int_{\pi}^{0} -\frac{\mu_0 I}{2} \sin\alpha \, d\alpha \boxed{= \mu_0 I}$

4) D'après le théorème d'Ampère $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$

ici $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^{A'} \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I + \int_C \vec{B}\cdot\vec{dl}$

Or $I_{enlacé} = I$ donc $\boxed{\int_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = 0}$

5) $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{e_z} = \pi R^2 I \vec{e_z}$

$$\vec{B}_{créé} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}}{r^3}\left|\begin{array}{l} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{array}\right.$$ (d'après le cours)

$$\vec{B}_{créé} = \frac{\mu_0 I R^2}{4a^3}\left|\begin{array}{l} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\int_C \vec{B}_{créé}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I R^2}{4a^3}\sin\theta \, a\,d\theta \quad (\text{car } \vec{dl} = a\,d\theta\,\vec{e_\theta})$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I R^2}{2a^2}}$$

On trouve 2 resultat differents bien que tout de même le deuxième tende vers 0 pour $a \gg R$. Ceci est du au fait que le modèle du dipole magnétique n'est valable qu'à grande distance

Ex 4 : Oscillateur à deux dipôles

1) Par définition $\vec{B}_{1/2} = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi a^3} \left| \begin{array}{l} 2\cos(\overset{\theta_1}{\alpha_1}) \to \vec{e}_{r_1} \\ \sin(\alpha_1) \to \vec{e}_{\theta_1} \\ 0 \to \vec{e}_{\varphi_1} \end{array} \right.$

$$\vec{B}_{2/1} = \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} \left| \begin{array}{l} 2\cos(\overset{\theta_2}{\alpha_2+\pi}) \to \vec{e}_{r_2} \\ \sin(\alpha_2+\pi) \to \vec{e}_{\theta_2} \\ 0 \to \vec{e}_{\varphi_2} \end{array} \right.$$

Ainsi $E_p = E_p(\vec{m}_1) + E_p(\vec{m}_2)$

$$= -\vec{m}_1 \vec{B}_{2/1} - \vec{m}_2 \vec{B}_{1/2}$$

Or $\vec{m}_1 = -m\cos\alpha_1 \vec{e}_{r_2} + m\sin\alpha_1 \vec{e}_{\theta_2}$

$$\vec{m}_2 = m\cos\alpha_2 \vec{e}_{r_1} - m\sin\alpha_2 \vec{e}_{\theta_1}$$

donc $E_p = \Big(-2m\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + m\sin\alpha_1\sin\alpha_2$

$$-(2m\cos\alpha_2\cos\alpha_1 - m\sin\alpha_2\sin\alpha_1)\Big)\frac{\mu_0 m}{4\pi a^3}$$

$$\boxed{E_p = W_0\left(-2\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)}$$

Avec $W_0 = \dfrac{\mu_0 m^2}{4\pi a^3}$

2) Cherchons les extrema de l'energie potentielle

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_1} = W_0 \left(2\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \right)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_2} = W_0 \left(2\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \right)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_1} = 0 \Rightarrow 2\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 = -\cos\alpha_1 \sin\alpha_2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_2} = 0 \Rightarrow -2\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2$$

Ainsi $-4\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 = -\cos\alpha_1 \sin\alpha$

d'ou $\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 = 0$ et de même $\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 = 0$

les positions d'equilibres sont $(0,0)$; (π,π); $(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; $(0,\pi)$ et $(\pi,0)$

les positions stables sont celles où les deux moments sont dans le même sens $(0,0)$; (π,π) et $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

les autres positions sont instables

3) D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué au dipole en mouvement :

$$\Delta E_m = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$= \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} J\dot{\theta}_0^2 + W_0(-2\cos\alpha_1\cos\theta + \sin\theta\sin\alpha_1)$$
$$- W_0(-2\cos\alpha_1\cos\theta_0 + \sin\theta_0\sin\alpha_1)$$

Avec $\alpha_1 = c^{st}$ et $\alpha_2 = \theta(t)$

En dérivant l'expression précédente il vient

$$0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + W_0(+2\cos\alpha_1\sin\theta + \sin\alpha_1\cos\theta)\dot{\theta}$$

Pour $\theta \ll 1$ $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$ donc

$$0 = J\ddot{\theta} + W_0 2\cos\alpha_1\,\theta + W_0\sin\alpha_1$$

Ainsi $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2W_0\cos\alpha_1}{J}\theta = -W_0\sin\alpha_1}$

Ceci est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2W_0\cos\alpha_1}{J}}$