

OPTIQUE 10 : Interférences à N ondes

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

1	Le réseau plan par transmission	2
1.1	Description	2
1.2	Observations expérimentales	3
1.3	Interprétation	4
2	Cavité FABRY-PÉROT et filtre interférentiel	11
2.1	Principe d'un interféromètre de FABRY-PÉROT	11
2.2	Filtre interférentiel	13

Dans les chapitres précédents nous avons étudié les interférences à deux ondes cohérentes. Bien évidemment, le phénomène d'interférence ne se limite pas à ce cas à deux ondes : intéressons-nous ici aux cas où N ondes cohérentes interfèrent. C'est le cas avec un réseau (utilisé en TP) ou encore une cavité FABRY-PÉROT.

1 Le réseau plan par transmission

Le **réseau plan** est un exemple de dispositif fonctionnant par **interférences de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique.**

1.1 Description

1.1.1 Définition

Définition : Un **réseau plan** est un objet **diffractant** présentant une structure périodique dans l'espace. On se limite dans ce cours à une structure périodique selon une seule direction notée Ox . La période spatiale est nommée **pas du réseau**.

1.1.2 Modélisation

Adoptons le modèle simple d'un système de N fentes identiques, parallèles et régulièrement espacées.

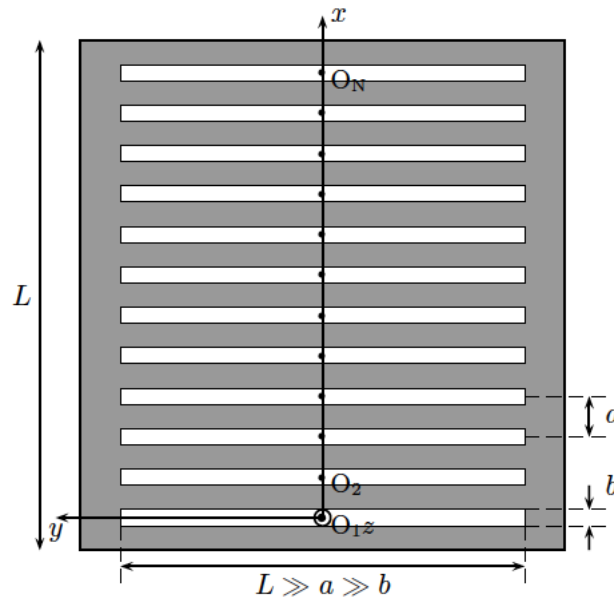


FIGURE 1 – Réseau plan unidimensionnel par transmission

Notations :

- a = pas du réseau (période spatiale selon Ox);
- b = largeur de chaque fente ;
- $n = \frac{1}{a}$: nombre de fentes par unité de longueur ou **nombre de traits par unité de longueur** ;
- N = nombre total de traits ; il vaut $N = Ln$ où L est la largeur du réseau.

1.1.3 Ordres de grandeur

- Dans le laboratoire d'optique, on trouve des réseaux à plusieurs milliers de LPI (qui signifie Line Per Inch). En français, *inch* se dit *pouce*. Comme 1 inch = 2,54 cm, un réseau 4000 LPI possède $\frac{4000}{25,4} = 157$ traits/mm.

Pour ce même réseau, le pas est donc $a = \frac{25,4}{4000} \cdot 10^{-3} = 6,4 \mu\text{m}$.

- Le nombre N de traits total est de l'ordre de quelques milliers mais lorsqu'un faisceau incident n'illumine le réseau que sur une portion de largeur L' alors le nombre total de trait utilisé est moindre : $N' = nL'$.

- La largeur b est de l'ordre du μm .

1.2 Observations expérimentales

1.2.1 Réseau éclairé par un laser

On illumine orthogonalement un réseau par un faisceau laser; l'observation se fait sur un écran situé loin du réseau.

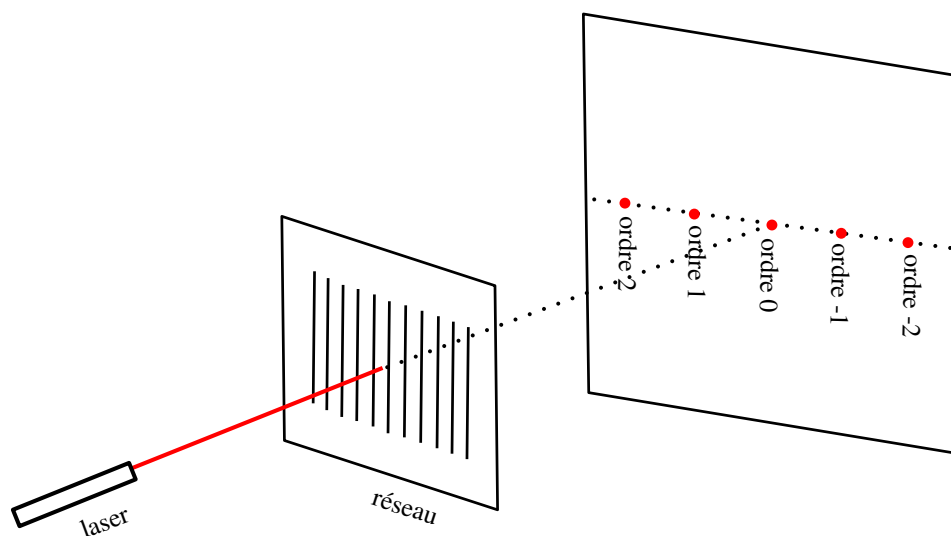


FIGURE 2 – Laser illuminant un réseau sous incidence normale

- **Observation A : Existence de maxima principaux dits "ordres de diffraction"**

Sur l'écran on observe une succession de petites taches lumineuses (on les nommera **maxima principaux**) régulièrement espacées dont l'une est dans le prolongement du faisceau (tache centrale correspondant à la lumière non diffractée). On les compte à partir de la tache principale (dite "ordre 0") : cf. figure 2.

- **Observation B : influence du pas du réseau sur les maxima principaux**

Si on remplace le réseau par un réseau de pas a plus grand, les taches sont plus resserrées. Une étude plus quantitative révélerait que la distance entre deux maxima principaux (c'est-à-dire deux ordres consécutifs) varie comme l'**inverse du pas du réseau**.

- **Observation C : existence d'un minimum de déviation pour chaque ordre**

Si on fait tourner le réseau autour d'un axe parallèle aux traits, on observe que les taches se rapprochent de la tache centrale avant de s'en éloigner à nouveau.

1.2.2 Réseau éclairé par une lampe spectrale à vapeur de mercure ou de la lumière blanche

- On réalise le montage de la figure 3 où la lentille L_1 permet de condenser la lumière sur la lentille de projection L_2 . L'écran est placé à environ 1 m de L_2 . On déplace la fente réglable de manière à obtenir une image nette de celle-ci sur l'écran. On place le réseau après L_2 à l'endroit où la lumière est la plus concentrée. La source est tantôt une lampe spectrale à vapeur de mercure, tantôt de la lumière blanche.

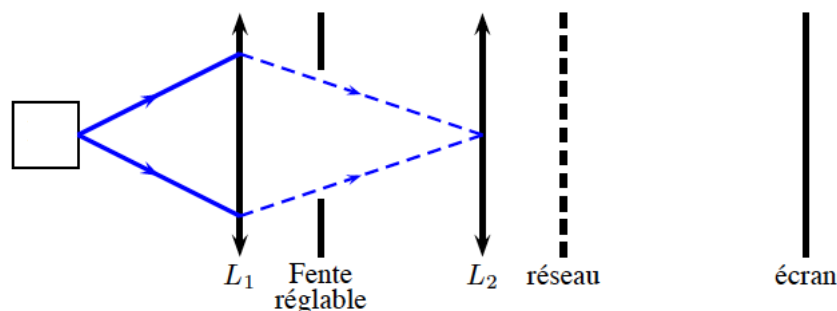


FIGURE 3 – Réseau éclairé par une source spectrale ou une lumière blanche

- On observe (voir figures 4 et 5) que :
 - l'image centrale, dite d'ordre 0, immobile et non décomposée : elle est identique en position et en couleur à celle obtenue en enlevant le réseau ;
 - des images colorées réalisant des spectres de la lumière utilisée (d'ordres $\pm 1, \pm 2, \dots$), répartis symétriquement par rapport à l'image d'ordre 0 si l'incidence est normale (**Observation D**) ;
Dans le cas de la lumière blanche, le rouge est plus dévié que le bleu (contrairement au prisme).
 - le mélange des spectres à partir d'un certain ordre pour les réseaux de pas faible ;
 - l'existence d'un minimum de déviation pour chaque raie (dans le cas de la lampe à vapeur de mercure) ;
 - décroissance de l'éclairement aux ordres élevés et diminution de la qualité de l'image (**Observation E**).

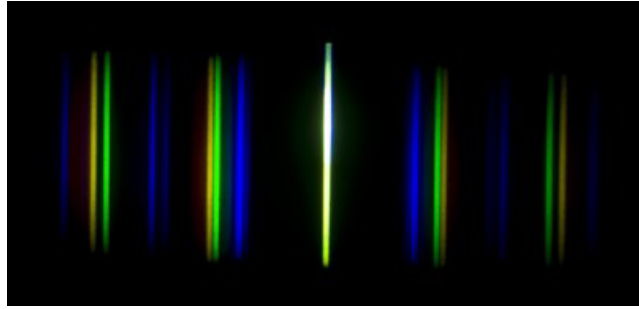


FIGURE 4 – Écran illuminé par un réseau éclairé par une lampe spectrale Hg

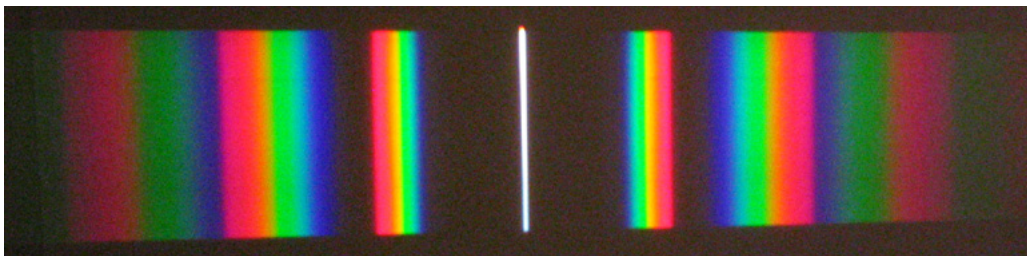


FIGURE 5 – Écran illuminé par un réseau éclairé par une lumière blanche

1.3 Interprétation

1.3.1 Quelques notions sur le phénomène de diffraction

• Mise en évidence du phénomène

Un faisceau laser a un diamètre de l'ordre de quelques millimètres. On peut chercher à isoler un rayon lumineux de ce faisceau en le faisant passer à travers une fente de **très faible largeur** (0,1 mm par exemple). Le résultat de l'expérience est représenté sur la figure 6.

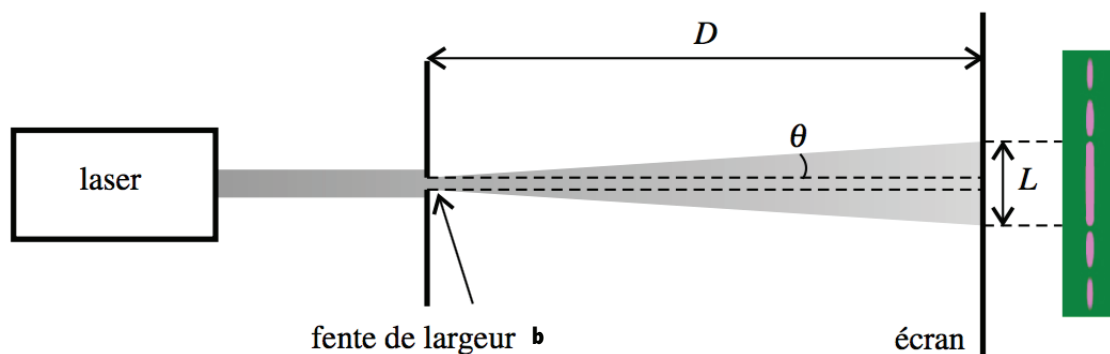


FIGURE 6 – Diffraction d'un faisceau laser par une fente

Alors qu'on s'attendait à voir sur l'écran une tache lumineuse de même largeur que la fente (trajet de la lumière en pointillé), on observe que **plus la largeur de la fente est faible, plus la lumière s'étale sur l'écran**. De plus, on voit sur l'écran une figure formée d'une tache centrale très lumineuse entourée de taches beaucoup moins lumineuses et deux fois moins larges (cf. figure 6). Cet écart aux lois de l'optique géométrique se nomme **le phénomène de diffraction**.

• **Loi de diffraction pour une fente (admise)**

Théorème - Figure de diffraction : Le faisceau diffracté par une fente de largeur b a un *demi-angle d'ouverture* θ correspondant à la tache centrale de la figure de diffraction, vérifiant la relation (avec les notations de la figure 6) :

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$$

1.3.2 Hypothèses d'étude

- ① Le réseau doit être éclairé par une onde plane (laser ou collimateur : source ponctuelle placée au foyer objet d'une lentille). La direction d'incidence de l'onde plane par rapport à la normale au réseau plan est repérée par l'angle θ_i **qui n'est pas nécessairement petit**.
- ② Les fentes étant très longues, la diffraction n'a lieu que dans le plan orthogonal au réseau et perpendiculaire aux fentes.
- ③ On supposera les fentes "infiniment fines" ($b \rightarrow 0$) de sorte que la tache centrale de diffraction devient très large.
- ④ On observe la figure sur un écran placé à très grande distance du réseau ("à l'infini") ou dans une lunette réglée à l'infini.

1.3.3 La formule des réseaux (par transmission) dite aussi relation de BRAGG

Théorème - Relation de BRAGG ou formule des réseaux : Lorsqu'un **réseau plan par transmission** de pas a est illuminé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 faisant l'angle (orienté) θ_i avec la normale au réseau, on observe des maxima principaux dans les directions θ_p telles que :

$$n_{air} a (\sin \theta_p - \sin \theta_i) = p \lambda_0 \Leftrightarrow a (\sin \theta_p - \sin \theta_i) = p \lambda$$

où p est un entier nommé "ordre de diffraction".

Le nombre d'ordres observés est limité par la condition $|\sin \theta_p| \leq 1$:

- si $\lambda \ll a$, on observera beaucoup d'ordres de diffraction,
- si $a \gtrsim \lambda$ seuls quelques ordres seront présents.

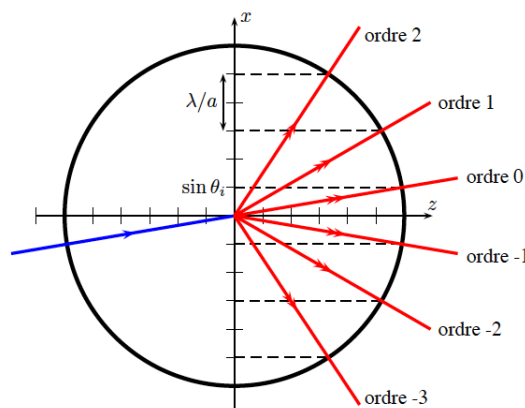


FIGURE 7 – Ordres de diffraction d'un réseau par transmission

Commentaires physiques : la *formule des réseaux par transmission* rend compte des observations A, B et D.

- **Observation A :** L'angle d'incidence θ_i étant fixé (choisissons $\theta_i = 0$ par exemple), le maximum d'ordre p a pour position angulaire θ_p telle que $\sin(\theta_p) = p \frac{\lambda}{a}$ où $p \in \mathbb{Z}$. La position angulaire des ordres est donc symétrique par rapport au maximum d'ordre 0.
- **Observation B :** Si l'on intéresse à l'ordre p , lorsque a diminue, θ_p augmente bien.
- **Observation D :** La formule des réseaux par transmission prévoit des ordres différents pour chaque longueur d'onde ; **un réseau est dispersif :**
 - le rouge est plus dévié que le bleu (contrairement au prisme).
 - éclairé en lumière blanche, on obtient des spectres d'ordre $\pm 1, \pm 2$, etc... C'est l'intérêt du réseau, il disperse la lumière.
 - l'ordre 0 n'est pas dévié quelle que soit la longueur d'onde et donne le faisceau géométrique. La non dispersion de l'ordre nul le rend sans intérêt, il est même néfaste puisqu'il contient une certaine puissance lumineuse qui n'est pas mise à profit.

1.3.4 Une preuve par représentation graphique

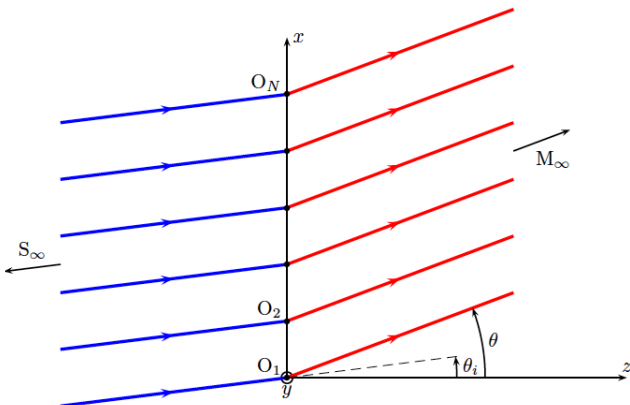


FIGURE 8 – Interférences entre les N ondes

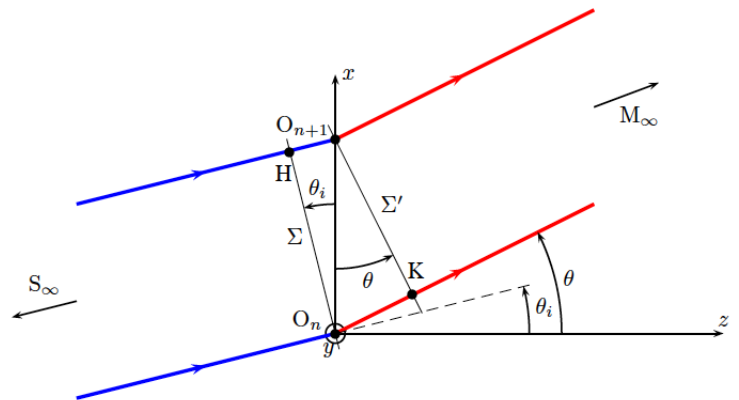


FIGURE 9 – Calcul de la différence de marche

1.3.5 Preuve par le calcul de l'éclairement

- Calcul

Éclairement dû à la diffraction par des fentes infiniment fines : Lorsque N fentes supposées infiniment fines d'un réseau sont illuminées par une onde plane (d'incidence θ_i par rapport à la normale au réseau), l'éclairement résultant en un point M à l'infini dans une direction θ par rapport à la normale est :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 N^2 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{N\Phi(M)}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\Phi(M)}{2}\right)}}_{\triangleq R_N(\Phi)} \quad \text{où } \Phi(M) \triangleq \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{air} a (\sin \theta_i - \sin \theta)$$

Preuve :

• Contenu physique

→ La fonction est 2π -périodique. Comme $R_N(0) = 1$, il vient $R_N(p2\pi) = 1$ où $p \in \mathbb{Z}$.

→ Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, la fonction $R_N(\Phi)$ s'annule lorsque $\Phi = n\frac{2\pi}{N}$ avec $n \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$. En effet, dans un intervalle de longueur 2π , la fonction $R_N(\Phi)$ s'annule lorsque $\sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right) = 0$ ET $\sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right) \neq 0$ c'est-à-dire lorsque $\frac{N\Phi}{2} \equiv 0[\pi]$ et $\frac{\Phi}{2} \not\equiv 0[\pi]$.

→ Entre deux annulations, on pourrait montrer qu'il y a un maximum local. **Il y a donc $N - 2$ maxima secondaires dans un intervalle de longueur 2π . Ces maxima secondaires sont de faible amplitude : on ne les perçoit pas.**

Évolution des maxima avec le nombre de traits : Plus le nombre de traits illuminé N est grand plus les maxima principaux sont lumineux ($\mathcal{E}_{max} = N^2\mathcal{E}_0$) et fins (largeur des pics : $2 \times \frac{2\pi}{N}$).

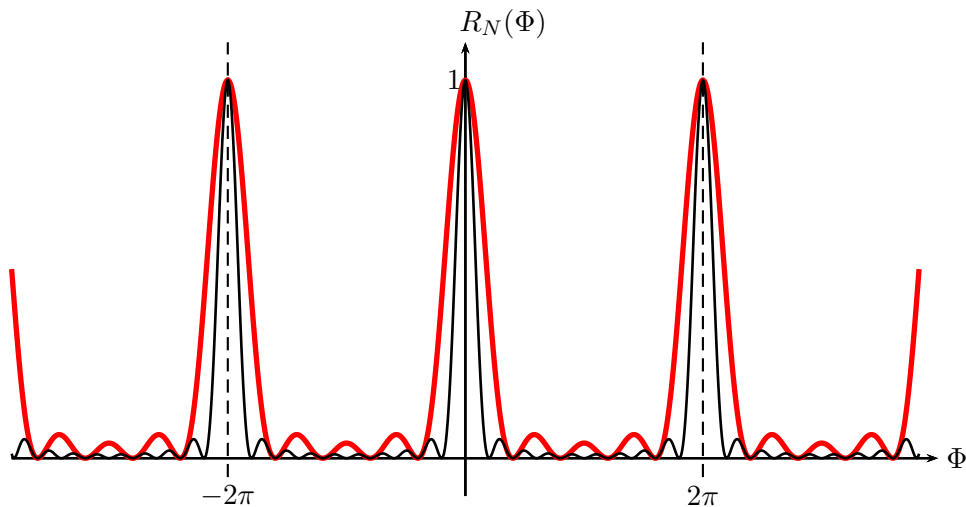


FIGURE 10 – Courbes $R_N(\Phi)$ pour trois valeurs de $N = 5$ (traits gras) et $N = 10$ (traits fins)

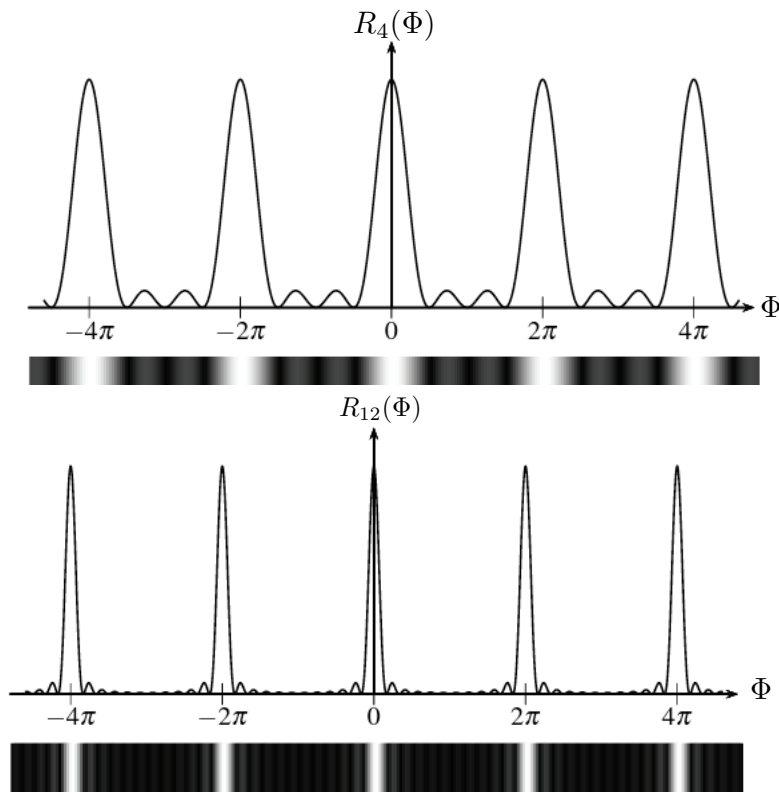


FIGURE 11 – Comparaison des éclaircissements quand $N = 4$ et $N = 12$

1.3.6 Complément : allure de l'éclairement dans le cas de fentes de largeur finie (hors-examen)

Éclairement dû à la diffraction par des fentes de largeur finie : Lorsque N fentes de largeur b non nulle d'un réseau sont illuminées par une onde plane (d'incidence θ_i par rapport à la normale au réseau), l'éclairement résultant en un point M à l'infini dans une direction θ par rapport à la normale fait intervenir un terme supplémentaire dit *terme de diffraction* (admis).

$$\mathcal{E}(M) = \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{b}{2a}\Phi(M)\right)}_{\text{Terme de diffraction}} \mathcal{E}_0 N^2 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{N\Phi(M)}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\Phi(M)}{2}\right)}}_{R_N(\Phi)}$$

où $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{\text{air}} a (\sin \theta_i - \sin \theta)$

Le courbe représentative de la fonction $\mathcal{E}(M)$ a été tracée sur la figure 12. Elle révèle que **les seuls ordres visibles sont ceux situés dans la tache centrale de la figure de diffraction d'un trait**. Cette étude rend compte de l'observation E.

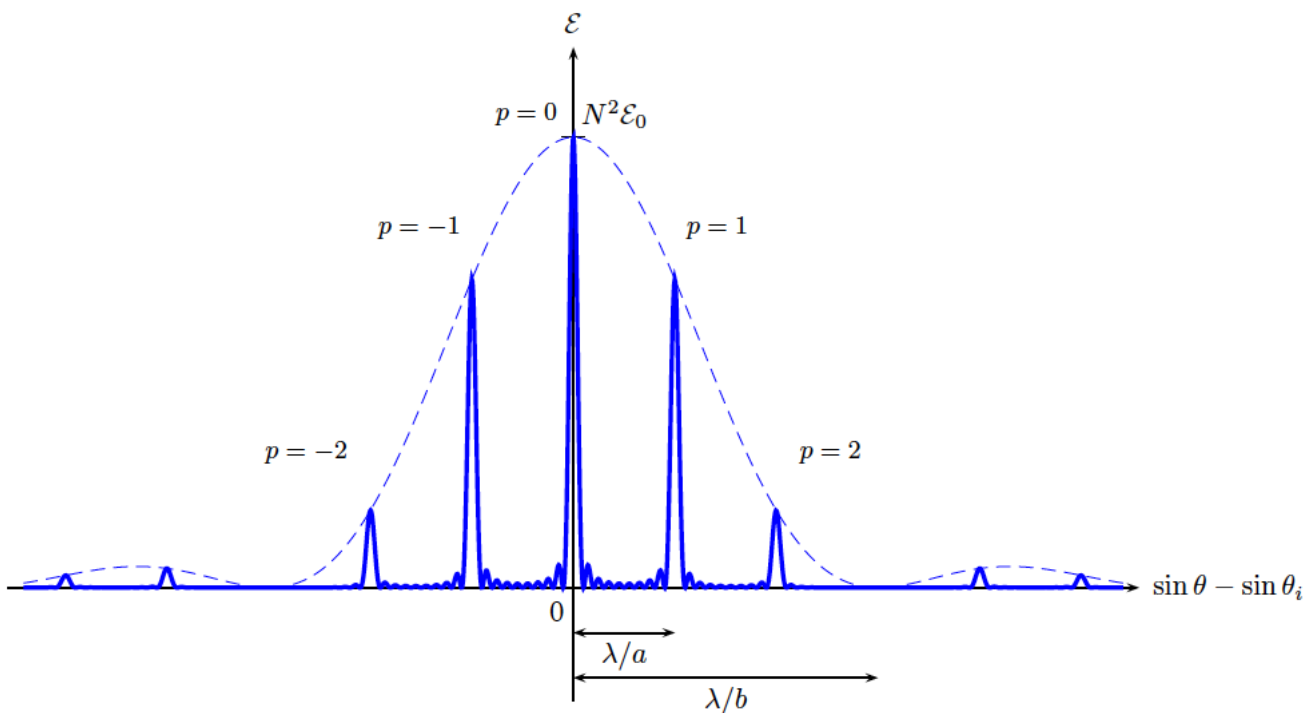


FIGURE 12 – Éclairement diffracté dans la direction θ_i pour $a = 3b$ et $N = 10$

Commentaire : Le choix $a = 2b$ impliquerait que les premières annulations de la fonction de diffraction coïncident exactement avec le maximum attendu pour les ordres pairs (sauf 0) : il y a donc suppression des ordres pairs, ce qui a pour avantage pratique le renforcement de la luminosité relative de l'ordre ± 1 , qui ne peut plus être confondu avec l'ordre ± 2 .

2 Cavité FABRY-PÉROT et filtre interférentiel

La **cavité FABRY-PÉROT** est un exemple de dispositif fonctionnant par **interférences de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, dont les amplitudes sont en progression géométrique et les phases en progression arithmétique**. On admettra ici les résultats principaux.

2.1 Principe d'un interféromètre de FABRY-PÉROT

Un interféromètre de FABRY-PÉROT (cf. figure 13) est assimilé à une lame d'air d'épaisseur e délimitée par deux lames semi-réfléchissantes parallèles identiques (\mathcal{L}_1) et (\mathcal{L}_2) (cf. figure 14). Ces lames sont supposées infiniment fines et sont recouvertes d'un dépôt métallique de sorte qu'il existe :

- un coefficient r de réflexion en amplitude ;
- un coefficient t de transmission en amplitude.

Les lames sont sans pertes de sorte que $\underbrace{r^2}_{\triangleq R} + \underbrace{t^2}_{\triangleq T} = 1$.

L'interféromètre est éclairé sous incidence i par une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 produite par une source ponctuelle A_0 . L'amplitude complexe de l'onde est notée \underline{a}_0 au point O. On observe l'éclairement à l'infini en un point M repéré par son inclinaison i par rapport à la normale aux lames. On note

$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_{air}}$ où n_{air} désigne l'indice optique de l'air.

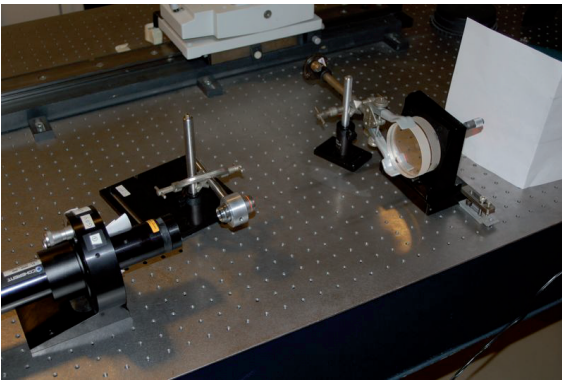


FIGURE 13 – À gauche système laser/objectif de microscope et à droite cavité Fabry-Pérot

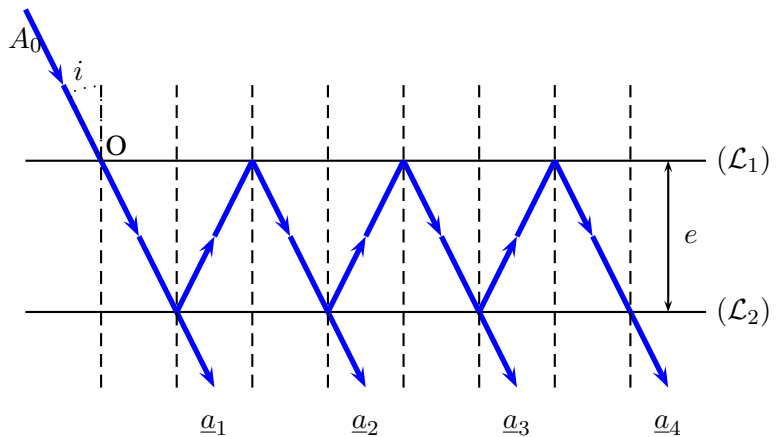


FIGURE 14 – Schéma de principe d'une cavité FABRY-PÉROT

- Le déphasage entre deux ondes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}$$

- Les amplitude complexe $\underline{a}_k(M)$ des ondes transmises successivement ($k \geq 1$) en M s'écrivent en fonction de l'amplitude complexe de l'onde incidente \underline{a}_0 et des coefficients de réflexion et transmission en amplitude (r et t) puis en intensité (R et T) :

$$\begin{cases} \underline{a}_1(M) = \underline{a}_0(M)t^2 = \underline{a}_0(M)T \\ \underline{a}_2(M) = \underline{a}_0(M)t^2r^2e^{i\varphi} = \underline{a}_0(M)TRe^{i\varphi} \\ \underline{a}_3(M) = \underline{a}_0(M)t^2r^4e^{i2\varphi} = \underline{a}_0(M)TR^2e^{i2\varphi} \\ \underline{a}_4(M) = \underline{a}_0(M)t^2r^6e^{i3\varphi} = \underline{a}_0(M)TR^3e^{i3\varphi} \\ \dots \\ \underline{a}_k(M) = \underline{a}_0(M)t^2r^{2(k-1)}e^{i(k-1)\varphi} = \underline{a}_0(M)TR^{k-1}e^{i(k-1)\varphi} \end{cases}$$

- Au total, l'amplitude complexe $\underline{a}(M)$ de l'onde transmise au point M situé dans le plan focal d'une lentille convergente est la somme des amplitudes complexes de toutes les ondes transmises :

$$\underline{a}(M) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \underline{a}_k(M) = \underline{a}_0 T (1 + R e^{i\varphi} + R^2 e^{i2\varphi} + R^3 e^{i3\varphi} + \dots + R^m e^{im\varphi} + \dots)$$

C'est une suite géométrique de raison $R e^{i\varphi}$ avec $R < 1$, d'où : $\underline{a}(M) = \underline{a}_0 T \frac{1}{1 - R e^{i\varphi}}$.

- On en déduit l'éclairement au point M :

$$\mathcal{E}(M) = |\underline{a}(M)|^2 = |\underline{a}_0(M)|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R e^{i\varphi}|^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \text{où } \mathcal{E}_0 = |\underline{a}_0|^2$$

La figure 15 présente trois courbes $\varphi \rightarrow \frac{\mathcal{E}(\varphi)}{\mathcal{E}_0}$ pour trois valeurs de R différentes.

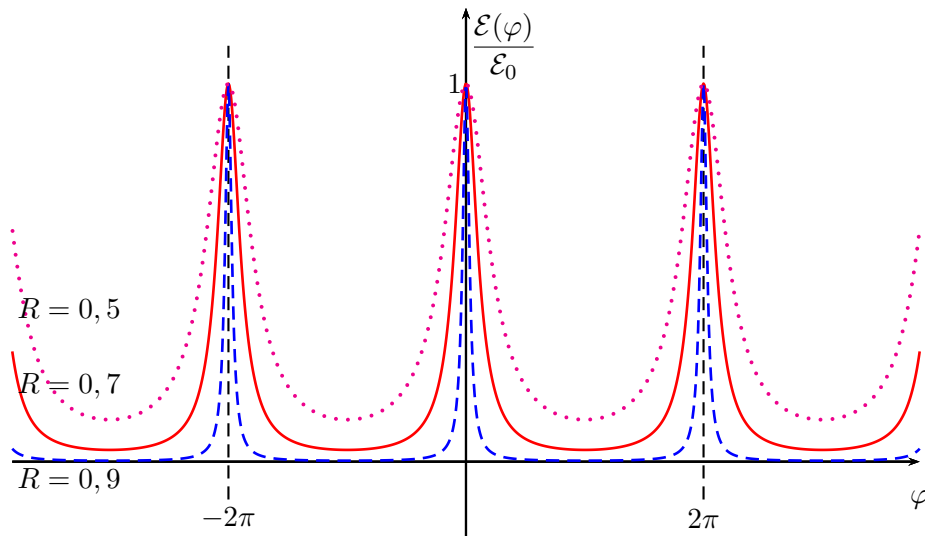


FIGURE 15 – Courbes $\varphi \rightarrow \frac{\mathcal{E}(\varphi)}{\mathcal{E}_0}$ pour trois valeurs de R

- On définit la **finesse de la raie** par $\mathcal{F} \triangleq \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$ où $\Delta\varphi$ est la largeur à mi-hauteur de la courbe $\varphi \rightarrow \frac{\mathcal{E}(\varphi)}{\mathcal{E}_0}$ au voisinage d'un maximum. Lorsque R est proche de 1, la finesse devient

$$\mathcal{F} = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

On en déduit le pouvoir de résolution PR de l'instrument : $PR = p\mathcal{F}$ avec l'ordre d'interférence $p = \frac{2e \cos i}{\lambda}$.

Le tableau 1 montre que le pouvoir de résolution est très élevé et qu'il varie beaucoup lorsque le coefficient de réflexion en intensité R se rapproche de 1. Dans ce cas particulier, les valeurs correspondent à $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $e = 1 \text{ cm}$ et $i \approx 0$.

R	0,80	0,90	0,95	0,99
\mathcal{F}	14	30	61	313
PR	$0,56 \times 10^6$	$1,2 \times 10^6$	$2,45 \times 10^6$	125×10^6
$\Delta\lambda$ (pm)	0,89	0,42	0,21	0,004

TABLE 1 – Paramètres caractéristiques de l'interféromètre de Fabry-Pérot

• L'interféromètre de Fabry-Pérot est donc un instrument très puissant avec un grand pouvoir de résolution, supérieur à celui d'un interféromètre de Michelson comme illustré sur les figures 16 et 17 qui représentent respectivement une simulation informatique de la figure d'interférence obtenue avec un interféromètre de Fabry-Pérot (pour lequel $\mathcal{F} = 9,4$) et un interféromètre de Michelson illuminés par le doublet du sodium (589,0 nm et 589,6 nm). Pour les deux figures, l'ordre au centre est $p = 162,1$ et les couleurs ont été inversées (les zones blanches représentent des franges sombres). On remarque en effet que le doublet du sodium est résolu par l'interféromètre de Fabry-Pérot contrairement à l'interféromètre de Michelson. C'est pourquoi on utilise l'interféromètre de Fabry-Pérot pour des analyses spectrales très fines.

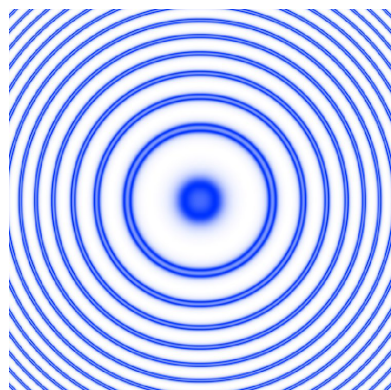
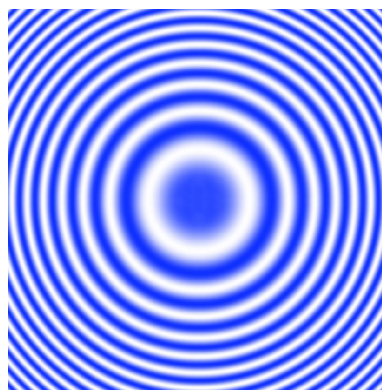
FIGURE 16 – Fabry-Pérot (simulation $\mathcal{F} = 9,4$)

FIGURE 17 – Michelson (simulation)

2.2 Filtre interférentiel

Le principe de fonctionnement d'un filtre interférentiel est semblable à celui d'une cavité Fabry-Pérot. En pratique, on superpose plusieurs cavités de ce type pour obtenir la courbe de transmission désirée. Pour améliorer les performances des filtres interférentiels, les fabricants les accolent souvent à des filtres colorés. On peut s'en rendre compte en observant par réflexion le filtre interférentiel : l'une des faces semble métallique (côté du filtre interférentiel qui réfléchit pratiquement toutes les longueurs d'onde), l'autre est colorée.

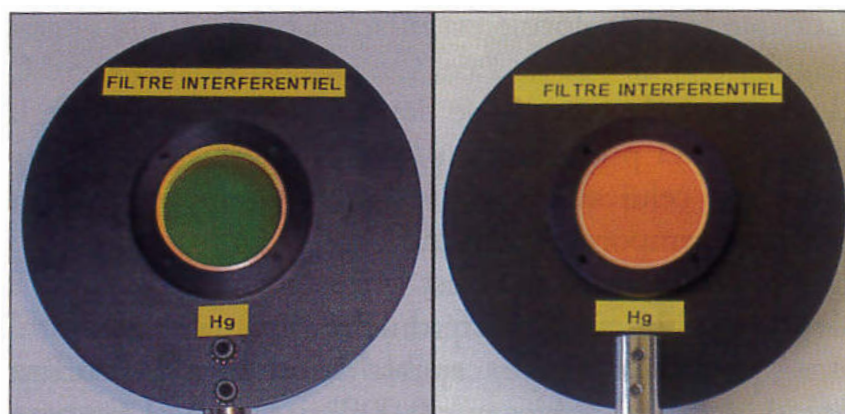


FIGURE 18 – Filtres interférentiels centrés sur la raie verte (à gauche) et jaune (à droite) du mercure

• L'épaisseur e est choisie très petite et la lumière utilisée est une lumière blanche ($400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$). Lorsqu'un pic d'interférences constructives est observé sous incidence quasi-normale, la différence de marche δ entre deux rayons transmis successifs est égale à un multiple de la longueur d'onde λ_0 : $\delta = 2n_{\text{air}}e = p\lambda_0$. Pour $e = 0,546 \mu\text{m}$ et $n_{\text{air}} = 1$ on a :

- $\lambda_0 = 1,09 \mu\text{m}$ pour $p = 1$
- $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ pour $p = 2$
- $\lambda_0 = 364 \text{ nm}$ pour $p = 3$

La condition d'interférences constructives est réalisée dans le domaine visible uniquement pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$. Cet interféromètre constitue donc un filtre interférentiel. Grâce à la grande finesse de ses pics d'interférences, il ne laisse passer qu'une bande spectrale très étroite (largeur $\approx 15 \text{ nm}$) autour de λ_0 .