Travaux dirigés de Thermodynamique 11 :
Diffusion thermique

École Centrale Pékin

2019-2020 - Année 3

Exercice 1 : Température dans le sol

On considère le sol comme un milieu semi-infini, d'axe vertical x orienté vers le bas. On admet que la loi de Joule est vérifiée, avec un coefficient de diffusion κ constant.
On modélise les variations de température au niveau du sol (sur une journée ou sur un an) comme des oscillations autour d'une valeur moyenne T_0, avec une amplitude θ_0 et une pulsation temporelle ω. On note alors la température à la surface du sol :

$$T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$$

On cherche la température à une profondeur x de la forme $T(x,t) = T_0 + \theta(x,t)$

1. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x,t)$.
2. On cherche $\theta(x,t)$ sous forme complexe $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f(x)}e^{i\omega t}$. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(x)}$ et sa solution.
3. Déterminer les deux constantes d'intégration pour $\underline{f}$.
4. Écrire alors la solution réelle $\theta(x,t)$. On introduira une longueur caractéristique L.
5. Tracer $\theta(x,t)$ en fonction de x pour plusieurs valeurs de t. Dans quel autre domaine a-t-on rencontré ce genre de solutions ?
6. On donne $D \simeq 6.10^{-7}$ m^2.s^{-1}. Calculer les longueurs typiques d'amortissement pour les variations sur une journée et sur un an.
7. Bien sûr, les deux variations (journalière et annuelle) ont lieu en même temps, on a donc deux forçages à la surface avec deux pulsations différentes. Doit-on modifier la résolution précédente pour résoudre ce problème ?

Exercice 2 : Température du corps humain sous l'eau

On cherche à décrire les transferts thermiques entre le corps d'un plongeur de température $T_i(t)$ (supposée uniforme dans tout le corps) et l'eau de température T_{ext}.
On s'intéresse au régime stationnaire et considère le problème unidimensionnel. On fait des hypothèses sur les différents types de transferts thermique :

— La peau du corps humain possède une résistance thermique R_1 et sa combinaison (潜水服) possède une résistance thermique R_{comb}

— Les transferts thermiques convectifs entre la paroi externe de la combinaison et l'eau suivent la loi des transferts conducto-convectifs (loi de Newton) qui donne, pour une interface de taille S :

$$\Phi_{\text{conv}} = hS(T_{\text{comb}} - T_{ext})$$

On note R_c la résistance associé a ce transfert thermique.

— Les transfert thermiques radiatifs entre la paroi externe de la combinaison et l'extérieur sont modélisés par le flux radiatif global :

$$\Phi_{\text{rad}} = \epsilon\sigma(T_{\text{comb}}^4 - T_{\text{ext}}^4)$$

On note R_r la résistance associée à ce transfert thermique

1. Exprimer les résistances R_r et R_c en fonction des données du problème. On fera l'approximation que la différence de température entre la combinaison et l'eau est suffisamment petite pour pouvoir faire un développement limité.
2. Proposer un schéma électrique équivalent au problème. Exprimer R_{eq} en fonction des résistances thermiques du problème.
3. Exprimer le flux thermique entre le corps et l'eau en fonction de R_{eq} et des températures $T_i(t)$ et T_{ext}.
4. Le corps humain dégage une puissance $\mathcal{P}$ qui le réchauffe. On suppose que cette puissance est constante au cours du temps. On note C la capacité thermique du corps humain. Donner une équation différentielle permettant de déterminer la température du corps humain à tout temps.
5. Résoudre cette équation connaissant $T_i(0)$. Déterminer la température limite T_{lim} atteinte, et ré-exprimer la solution en fonction de T_{lim}. À quoi cette solution vous fait-elle penser ?
6. *Question bonus :* Proposer un schéma électrique équivalent au problème entier, c'est-à-dire, un plongeur qui fournit une puissance $\mathcal{P}$ dans l'eau à la température T_{ext}.

Exercice 3 : Création d'entropie

Prenons un solide de conductivité thermique K (qui vérifie la loi de Fourier) qui subit un phénomène de diffusion sans source de chaleur.

1. À partir de l'équation de conservation de l'énergie et de l'identité thermodynamique, écrire une équation semblable à une équation de conservation sur l'entropie s.
2. Utiliser alors la formule suivante pour faire apparaître un terme lié au gradient de température.

$$\text{div}(f\overrightarrow{A}) = f\text{div}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}f$$

3. Réécrire l'équation comme une équation de conservation avec un terme source et un terme de transport. On montrera que le terme source est bien positif.