TD 11 Thermo : Diffusion Thermique

Exercice 1

1) Loi de Joule $\vec{j_{TR}} = -K\vec{\nabla}(T)$

Équation de conservation de l'énergie $c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j_{TR}}) = 0$

d'où $\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T \qquad D = \frac{K}{\rho c}$

$T = T_0 + \theta(x,t) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\Delta\theta}$

2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{f}(x)e^{i\omega t}\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\underline{f}(x)\, e^{i\omega t}\right)$$

$$i\omega \underline{f}\, e^{i\omega t} = D\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\underline{f}'' = \frac{i\omega}{D}\underline{f}} \Rightarrow \underline{f} = Ae^{\underline{r_1}x} + Be^{\underline{r_2}x}$$

Racines de l'equations caractéristique : $\underline{r}^2 = \frac{i\omega}{D}$

$$\underline{r}^2 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}\right)^2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\underline{r_1} &= \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i) \\ \underline{r_2} &= -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\underline{f}(x) = A\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\, e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} + Be^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\, e^{+i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}}$$

3) La température ne diverge pas en $x = +\infty$ donc $\boxed{B = 0}$

et $T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \theta(0,t) = \theta_0 \cos(\omega t)$

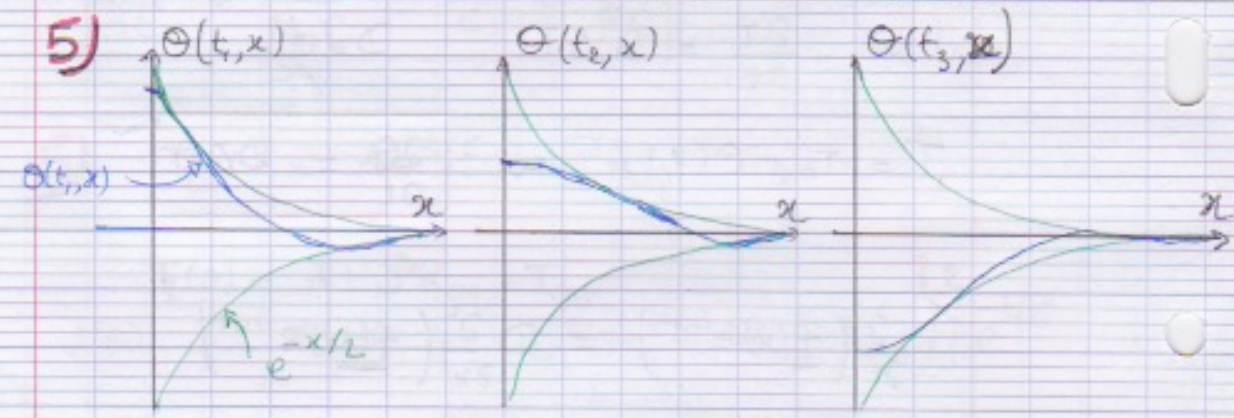
donc $\boxed{A = \theta_0}$ et $\boxed{\underline{f} = \theta_0 \, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\,x} \, e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\,x}}$

4) $\boxed{L = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}}$

$$\theta(x,t) = \mathrm{Re}\left(\theta_0 e^{-x/L} e^{-i(\omega t - x/L)}\right)$$

$$\boxed{\theta(x,t) = \theta_0 e^{-x/L} \cos(\omega t - x/L)}$$

5)



⚠ La période spatiale du cosinus est $2\pi L$ et la longueur typique d'atténuation de l'exponentielle est L donc on ne voit pas les oscillations du cosinus car l'amplitude devient rapidement trop faible.

6) $L = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ $\qquad \omega_{1\,an} = \frac{2\pi}{365.24.3600}$

$$\omega_{1\,jour} = \frac{2\pi}{3600.24}$$

$\boxed{L_{1an} = 2{,}45 \text{ m}}$ $\qquad \boxed{L_{1jour} = 13 \text{ cm}}$

7) Pas besoin de modifier la résolution car l'équation est linéaire ! $\quad \theta_{tot} = \theta_{1jour} + \theta_{1an}$.

Exercice 2

1) On utilise l'analogie thermique ↔ électrique (car on a supposé que on était en 1D stationnaire).

$$\Delta V = R i \quad \longleftrightarrow \quad \Delta T = R_{th} \, \phi$$

- Entre la paroi externe et l'eau : $\phi_{conv} = h S (T_{comb} - T_{ext})$

$$\Rightarrow \boxed{R_c = \frac{1}{hS}}$$

- Flux Radiatif : $\phi_{rad} = \epsilon \sigma (T_{comb}^4 - T_{ext}^4)$

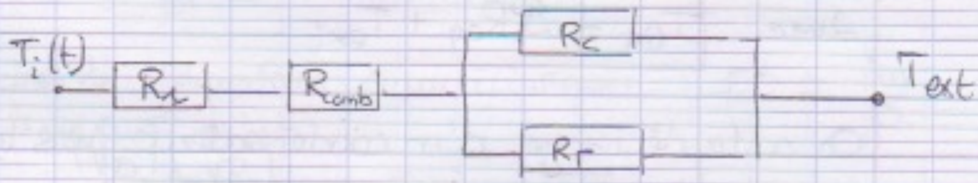
$$= \epsilon \sigma \left((T_{ext} + \Delta T)^4 - T_{ext}^4 \right)$$

$$\phi_{rad} = \epsilon \sigma \, T_{ext}^4 \left[\left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{ext}} \right) - 1 \right]$$

$$\phi_{rad} = \epsilon \sigma \, T_{ext}^4 \frac{4 \Delta T}{T_{ext}} = \epsilon \sigma \frac{4 \Delta T}{T_{ext}^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_r = \frac{1}{4 \epsilon \sigma T_{ext}^3}}$$

2)



$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_{comb} + \frac{R_c R_r}{R_c + R_r}}$$

3) On peut directement écrire le flux, grâce à l'analogie

$$\Delta T = R_{eq} \phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{T_i(t) - T_{ext}}{R_{eq}}}$$

(Flux total $= \phi_{el} \times$ Surface du corps)

4) Bilan d'énergie sur le corps humain pendant dt

$\delta Q_{gagnée} = \mathcal{P}\,dt \qquad \delta Q_{perdue} = \phi\,dt$

Flux x Surface "Puissance"

$dU = \delta Q_{gagné} - \delta Q_{perdu} = (\mathcal{P} - \phi)\,dt$

Puissance totale

$$dU = C\frac{dT_i}{dt} = \mathcal{P} - \frac{T_i(t) - T_{ext}}{R_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{R_{eq}C} = \frac{\mathcal{P}}{C} + \frac{T_{ext}}{RC}}$$

5) $T_i(t) = Ae^{-t/\tau} + \mathcal{P}R_{eq} + T_{ext}$

$T_i(0) = A + \mathcal{P}R_{eq} + T_{ext}$

d'où $T_i(t) = [T_i(0) - (\mathcal{P}R_{eq} + T_{ext})]\,e^{-t/\tau} + \mathcal{P}R_{eq} + T_{ext}$

$$\boxed{T_i(t) = T_{lim} + (T(0) - T_{lim})\,e^{-t/\tau}}$$

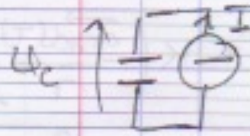
avec $\boxed{T_{lim} = \mathcal{P}R_{eq} + T_{ext}}$

On a la décharge d'un condensateur vers la valeur T_{lim}, chargé initialement à la tension $T_i(0)$

6) ⚠ Il y a plusieurs solutions suivant la façon dont on interprète la température comme une tension ($T = T - 0$ = différence de potentiels donc on peut toujours voir T comme ΔT) ou comme un potentiel pur.

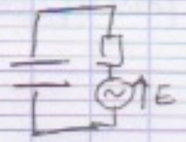
Le terme $C\frac{dT}{dt}$ fait penser à $C\frac{du_c}{dt}$ = Courant i

Et le terme en puissance est un générateur de courant



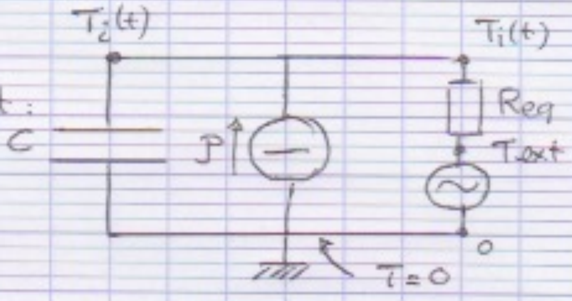
$$C\frac{dU_c}{dt} = I \quad \longleftrightarrow \quad C\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}$$

Et le terme $\frac{T_i - T_{ext}}{R}$ est une source de tension avec une résistance interne



$$C\frac{dU_c}{dt} = i = \frac{U_c - E}{R} \quad \longleftrightarrow \quad C\frac{dT}{dt} = \frac{T_i - T_{ext}}{R}$$

D'où finalement :



Exercice 3

1) $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{J_Q}) = 0$ et $\vec{J_Q} = -K\vec{\nabla}(T)$

$du = Tds - Pdv$ Pour un solide $dv = 0$

$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{T}\mathrm{div}(\vec{J_Q}) = 0 \quad (1)}$$

2) $\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\cdot\vec{J_Q}\right) = \frac{1}{T}\mathrm{div}(\vec{J_Q}) + \vec{J_Q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)$

$$(1) : \boxed{\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{J_Q}}{T}\right) + \vec{J_Q}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(T)}{T^2} = 0}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \underbrace{\mathrm{div}\left(\frac{\vec{J_Q}}{T}\right)}_{\text{Transport}} = \underbrace{-\vec{J_Q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(T)\cdot\frac{1}{T^2}}_{\text{Source}}$$

3) $\vec{J_Q} = -K\vec{\nabla}(T)$

d'où : (1) : $\boxed{\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}\left(\frac{\vec{J_Q}}{T}\right)}_{\text{Transport d'entropie}} = \underbrace{+K\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(T)}{T}\right)^2}_{\text{Source d'entropie}}}$

Le terme de création d'entropie est bien positif comme le prévoit le second principe.